

# Variables Aléatoires

MatheX

7 mai 2024



# Variables Aléatoires

## Table des matières :

- 1 Opérations sur les variables aléatoires
- 2 Loi des grands nombres

# Variables Aléatoires

## Table des matières :

- 1 Opérations sur les variables aléatoires
  - Transformation affine
  - Espérance et variance d'une transformation affine
  - Somme de deux variables aléatoires
  - Espérance et variance d'une somme
  - Répétitions identitiques et indépendantes

# Variables Aléatoires

## Définition 1 : (transformation affine)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ . Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réel.

La variable aléatoire  $Z=aX+b$  est la variable aléatoire qui prend pour valeur :

$$z_i = ax_i + b \quad \text{pour tout } i \text{ allant de } 1 \text{ à } n.$$

# Variables Aléatoires

## Exemple :

**a.** On lance un dé à 6 faces. Si on a un multiple de 3, on gagne 3 points ; si on a 1, on perd 10 points ; sinon on a 0 points. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  associée au gain de ce jeu.

**b.** On multiplie maintenant les gains du jeu précédent par 2 et on perd un point à chaque lancé. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Z$  associée au gain de ce nouveau jeu.

# Variables Aléatoires

## Exemple :

a. On lance un dé à 6 faces. Si on a un multiple de 3, on gagne 3 points ; si on a 1, on perd 10 points ; sinon on a 0 points. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  associée au gain de ce jeu.

|               |     |           |        |
|---------------|-----|-----------|--------|
| $x_i$         | -10 | 0         | 3      |
| $\{X = x_i\}$ | {1} | {2, 4, 5} | {3, 6} |
| $P_i$         | 1/6 | 3/6       | 2/6    |

b. On multiplie maintenant les gains du jeu précédent par 2 et on perd un point à chaque lancé. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Z$  associée au gain de ce nouveau jeu.

|                  |     |           |        |
|------------------|-----|-----------|--------|
| $z_i = 2x_i - 1$ | -19 | -1        | 5      |
| $\{Z = z_i\}$    | {1} | {2, 4, 5} | {3, 6} |
| $P_i$            | 1/6 | 3/6       | 2/6    |

# Variables Aléatoires

## Propriété 1 : (espérance et variance d'une transformation affine)

Soit  $X$  une variable aléatoire.

Soit  $a$  et  $b$  deux réels.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = V(aX) = a^2V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = a\sigma(X)$$

# Variables Aléatoires

Exemple :

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type des deux exemples de la définition 1.

**a.**

**b.**

# Variables Aléatoires

**Exemple :**

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type des deux exemples de la définition 1.

$$\mathbf{a.} \quad E(X) = \frac{1}{6} \times (-10) + \frac{3}{6} \times 0 + \frac{2}{6} \times 3 = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \frac{1}{6} \times 100 + \frac{3}{6} \times 0 + \frac{2}{6} \times 9 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{59}{3} - \frac{16}{9} = \frac{161}{9} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{161}}{3}$$

$$\mathbf{b.} \quad Z = 2X - 1 \Rightarrow E(aX + b) = 2E(X) - 1 = 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -\frac{11}{3}$$

$$Z = 2X - 1 \Rightarrow V(Z) = 2^2 \times V(X) = 4V(X) \Rightarrow \sigma(Z) = \frac{2\sqrt{161}}{3}$$

# Variables Aléatoires

## Démonstration :

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^n p_i(ax_i + b) = a \sum_{i=1}^n p_i x_i + b \sum_{i=1}^n p_i = aE(X) + b \quad \square$$

$$\begin{aligned} V(aX) &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i - E(aX))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (a^2 x_i^2 - 2ax_i E(aX) + E^2(aX)) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (a^2 x_i^2 - 2a^2 x_i E(X) + a^2 E^2(X)) = a^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = a^2 E(X) \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X + b) &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i + b - E(X + b))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i + b - E(X) - b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = V(X) \quad \square \end{aligned}$$

# Variables Aléatoires

## Définition 2 : (somme de deux variables aléatoires)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires.

La variable aléatoire  $S=X+Y$  est la variable aléatoire qui prend pour valeur les sommes des valeurs possibles de  $X$  et de  $Y$ .

# Variables Aléatoires

## Exemple :

$X$  est associée au lancé d'une pièce où l'on gagne 1 point sur Pile et on perd 1 point sur Face.

$Y$  est associée au lancé d'un dé tétraédrique où l'on gagne autant de points que le nombre sorti.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $S = X + Y$

# Variables Aléatoires

## Exemple :

$X$  est associée au lancé d'une pièce où l'on gagne 1 point sur Pile et on perd 1 point sur Face.

$Y$  est associée au lancé d'un dé tétraédrique où l'on gagne autant de points que le nombre sorti.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $S = X + Y$

|       |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $s_i$ | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
| $P_i$ | 1/8 | 1/8 | 2/8 | 2/8 | 1/8 | 1/8 |

$$\{S = 0\} = \{X = -1 \text{ ET } Y = 1\} \Rightarrow P(S = 0) = P(X = -1) \times P(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\{S = 2\} = \{(X = 1 \text{ ET } Y = 1) \text{ OU } (X = -1 \text{ ET } Y = 3)\} \Rightarrow P(S = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

# Variables Aléatoires

## Propriété 2 : (espérance et variance d'une somme)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

# Variables Aléatoires

Exemple :

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de l'exemple de la définition 2.

# Variables Aléatoires

Exemple :

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de l'exemple de la définition 2.

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$X$  et  $Y$  sont indépendantes donc :

$$V(S) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\sigma(S) = \sqrt{V(S)} = \frac{3}{2}$$

# Variables Aléatoires

## Propriété 3 : (répétitions identiques et indépendantes)

Soit  $n$  répétitions identiques et indépendantes d'une même expérience aléatoire et  $X$  une variable aléatoire sur cette expérience.

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  les variables aléatoires (de même loi de probabilité que  $X$ ) associées à chacune de ces expériences.

Soit  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  et  $M_n = \frac{S_n}{n}$  les variables aléatoires somme et moyenne empirique, on a alors :

$$E(S_n) = nE(X)$$

$$V(S_n) = nV(X)$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X)$$

$$E(M_n) = E(X)$$

$$V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

# Variables Aléatoires

Exemple :

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale :  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

# Variables Aléatoires

**Exemple :** Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale :  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

On considère les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  :  $X_i \sim \mathcal{B}(p)$

On a  $E(X_i) = p$  et  $V(X_i) = p(1 - p)$

Or  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = S_n$  et donc :

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

# Variables Aléatoires

## Exemple 2 :

*On demande à des élèves le nombre d'exercices de Maths réalisés par semaine et on associe à la réponse la variable aléatoire  $X$ .*

*On sait que l'espérance de  $X$  est 10 et son écart-type est 4.*

*Calculer l'espérance et l'écart-type moyens d'un échantillon de 100 élèves.*

# Variables Aléatoires

## Exemple 2 :

*On demande à des élèves le nombre d'exercices de Maths réalisés par semaine et on associe à la réponse la variable aléatoire  $X$ .*

*On sait que l'espérance de  $X$  est 10 et son écart-type est 4.*

*Calculer l'espérance et l'écart-type moyens d'un échantillon de 100 élèves.*

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  les variables aléatoires, de même loi de probabilité que  $X$ , associées à la réponse de chaque élève de l'échantillon.

$(X_1, X_2, \dots, X_{100})$  est un échantillonnage de  $X$ .

Soit la variable aléatoire moyenne empirique  $M_{100} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}$  associée à cet échantillonnage, on a alors :

$$E(M_{100}) = E(X) = 10 \text{ et } \sigma(M_{100}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{100}} = \frac{4}{10} = 0,4$$

L'espérance est la même mais l'écart-type est bien meilleur ...

# Variables Aléatoires

## Démonstration :

Pour  $S_n$ , on applique la propriété 2 sur les  $X_i$  qui suivent la même loi de probabilité que  $X$  et qui sont indépendantes.

$$\begin{aligned} E(S_n) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \\ &= E(X) + E(X) + \cdots + E(X) = nE(X) \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(S_n) &= V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) \\ &= V(X) + V(X) + \cdots + V(X) = nV(X) \quad \square \end{aligned}$$

Pour  $M_n$ , on applique la propriété 1 avec l'espérance et la variance d'une transformation affine :

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n}nE(X) = E(X) \quad \square$$

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2}nV(X) = \frac{V(X)}{n} \quad \square$$

# Variables Aléatoires

## Table des matières :

### 2 Loi des grands nombres

- Inégalité de Bienaymé-Tchébychev
- Inégalité de concentration
- Loi des grands nombres

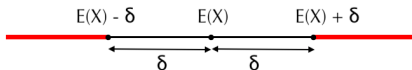
# Variables Aléatoires

## Propriété 4 : (inégalité de Bienaymé-Tchébychev)

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité quelconque.

Pour tout réel strictement positif  $\delta$ , on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$



# Variables Aléatoires

## Exemple :

*La pointure moyenne des hommes est 43 et son écart-type est de 2.*

*Que peut-on dire de la probabilité que la pointure d'un homme prise au hasard soit inférieure ou égale à 39 ou supérieure ou égale à 47 ?*

# Variables Aléatoires

## Exemple :

*La peinture moyenne des hommes est 43 et son écart-type est de 2.*

*Que peut-on dire de la probabilité que la peinture d'un homme prise au hasard soit inférieure ou égale à 39 ou supérieure ou égale à 47 ?*

Soit  $X$  la variable aléatoire associée à la peinture d'un homme.

D'après l'énoncé :  $E(X) = 43$  et  $\sigma(X) = 2$

D'après l'inégalité de Bienaymé-tchebychev :  $P(|X - 43| \geq 4) \leq \frac{4}{4^2} = 25\%$

Ainsi, on obtient une probabilité de 25% que la peinture d'un homme prise au hasard soit inférieure ou égale à 39 ou supérieure ou égale à 47.

(et donc de 75% qu'elle soit supérieure à 39 et inférieure à 47)

# Variables Aléatoires

## Démonstration :

La variable aléatoire  $X$  prend un ensemble de valeurs  $x_i$ .

Soit  $I$  l'ensemble contenant les valeurs de la variable aléatoire  $X$  à une distance supérieur ou égale à  $\delta$  de  $E(X)$  :  $x_i \in I \Rightarrow |x_i - E(X)| \geq \delta$

$$V(x) = \sum_{x_i \in I} p_i (x_i - E(X))^2 + \sum_{x_i \notin I} p_i (x_i - E(X))^2 \geq \sum_{x_i \in I} p_i (x_i - E(X))^2$$

$$\text{Or } \sum_{x_i \in I} p_i (x_i - E(X))^2 \geq \sum_{x_i \in I} p_i \delta^2 = \delta^2 \sum_{x_i \in I} p_i = \delta^2 P(|X - E(X)| \geq \delta)$$

$$\text{D'où : } P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2} \quad \square$$

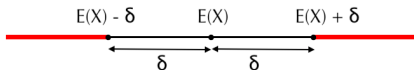
# Variables Aléatoires

## Propriété 5 : (inégalité de concentration)

Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne de  $n$  répétitions identiques et indépendantes d'une expérience aléatoire associée à une variable aléatoire  $X$ .

Pour tout réel strictement positif  $\delta$ , on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \delta^2}$$



# Variables Aléatoires

## Exemple :

*Combien faut-il faire de lancés d'un dé tétraédrique pour être sûr à 95% que la moyenne des résultats appartienne à  $]2; 3[$  ?*

# Variables Aléatoires

## Exemple :

*Combien faut-il faire de lancés d'un dé tétraédrique pour être sûr à 95% que la moyenne des résultats appartienne à ]2; 3[ ?*

Soit  $X$  la variable aléatoire associée au résultat d'un dé tétraédrique.

On a  $E(X) = 2,5$  et  $V(X) = 1,25$ .

Soit  $M_n$  la variable aléatoire associée à la moyenne des résultats de  $n$  lancés.

On cherche  $n$  tel que :  $P(|M_n - 2,5| < 0,5) \geq 95\%$

D'après l'inégalité de concentration :  $P(|M_n - 2,5| \geq 0,5) \leq \frac{1,25}{n \times 0,5^2} = \frac{5}{n}$

Or  $P(|M_n - 2,5| \geq 0,5) = 1 - P(|M_n - 2,5| < 0,5)$

On cherche donc  $n$  tel que :  $\frac{5}{n} \leq 5\% \Leftrightarrow n \geq 100$

# Variables Aléatoires

## Démonstration :

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev à  $M_n$  :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$$

Or  $E(M_n) = E(X)$  et  $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$  (voir propriété 3)

$$\text{D'où : } P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \delta^2} \quad \square$$

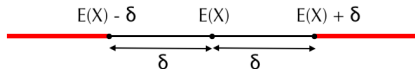
# Variables Aléatoires

## Propriété 6 : (loi des grands nombres)

Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne de  $n$  répétitions identiques et indépendantes d'une expérience aléatoire associée à une variable aléatoire  $X$ .

Pour tout réel strictement positif  $\delta$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$$



La moyenne empirique converge vers l'espérance, ou encore, l'espérance est la moyenne empirique des résultats d'une infinité de répétitions.

# Variables Aléatoires

## Démonstration :

On passe l'inégalité de concentration à la limite.

Pour tout réel strictement positif  $\delta$ , on a :  $0 \leq P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$

Or, vu que  $\delta \neq 0$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(X)}{n\delta^2} = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$   $\square$