

# Raisonnement par récurrence

MatheX

6 septembre 2023



# Raisonnement par récurrence

## Table des matières :

- 1 Hérité
- 2 Principe de récurrence

# Raisonnement par récurrence

## Définition 1 : (Hérédité)

Soit une propriété  $P_n$  dépendante d'un entier naturel  $n$ .

Soit  $n_0$  un entier naturel.

$P_n$  est **héréditaire**  
à partir du rang  $n_0$



Pour tout entier naturel  $k \geq n_0$  :

$$P_k \implies P_{k+1}$$

NB : Pratiquement, on suppose que  $P_k$  est vraie et, avec cette hypothèse, nommée hypothèse de récurrence (*HR*), on essaie de démontrer que  $P_{k+1}$  est vraie.

# Raisonnement par récurrence

**Exemple :** Soit la propriété  $P_n : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$   
 Démontrez que  $P_n$  est héréditaire :

- On suppose  $P_k$  vraie, donc on a :  $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$  (HR)
- On essaie maintenant de démontrer que  $P_{k+1}$  est vraie :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

- On conclue : on a montré que  $P_k \Rightarrow P_{k+1}$  donc la propriété est bien héréditaire.

# Raisonnement par récurrence

## Axiome 1 : (Principe de récurrence)

Soit une propriété  $P_n$  dépendante d'un entier naturel  $n$ .

Soit  $n_0$  un entier naturel.

- Si  $P_{n_0}$  est vraie (initialisation)
- **Et** si  $P_n$  est héréditaire à partir du rang  $n_0$  (hérédité)

Alors  $P_n$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$  (conclusion)

# Raisonnement par récurrence

Exemple :

Démontrez que pour tout entier naturel  $n$  :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \text{avec } a \text{ un réel positif}$$

Soit la propriété  $P_n : (1 + a)^n \geq 1 + na$

○ Initialisation : avec  $n = 0$ ,  $(1 + a)^0 = 1$  et  $1 + 0 \times a = 1$  donc  $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$   
 $P_0$  est vraie et la propriété est initialisée.

○ Hérédité : on suppose  $P_k$  vraie, on a donc  $(1 + a)^k \geq 1 + ka$  (HR)

On essaie de montrer que  $P_{k+1}$  est vraie, c'est à dire que :  $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka$$

$$\Rightarrow (1 + a)^k (1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a) \quad \text{car } 1 + a > 0$$

$$\Rightarrow (1 + a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2 \geq 1 + ka + a \quad \text{car } ka^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (1 + a)^{k+1} \geq 1 + a(k + 1)$$

$P_{k+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire

○ Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, donc par le principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$  □