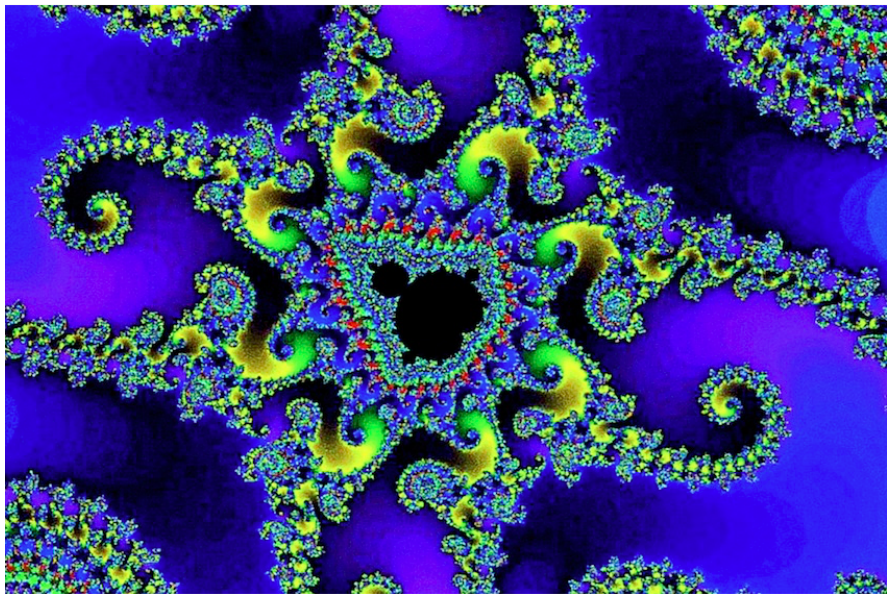


Limites de suites

MatheX

17 septembre 2023



Limites de suites

Table des matières :

- 1 Limite finie ou infinie d'une suite
- 2 Opérations sur les limites
- 3 Limites et comparaison
- 4 Limites de suites monotones

Limites de suites

Table des matières :

1 Limite finie ou infinie d'une suite

- Limite finie d'une suite
- Limite infinie d'une suite
- Divergence d'une suite

Limites de suites

Définition 1 : (limite finie d'une suite)

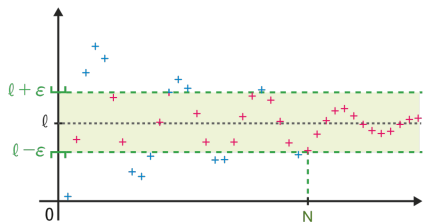
Soit ℓ un nombre réel.

(u_n) a pour **limite ℓ** \iff

Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N

NB :

- on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
- on dit aussi : (u_n) converge vers ℓ
- on essaiera de prouver que :
pour tout ε , il existe N tel que : pour tout $n \geq N$, $u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$
avec ε un réel positif non nul et N un entier naturel



Limites de suites

Exemple :

Étudiez la limite de la suite $u_n = \frac{1}{n}$

Intuitivement : on voit que la limite est $\ell = 0$ et que la suite est convergente.

Sur un exemple : si on choisit $\varepsilon = 10^{-6}$, on peut trouver N tel que pour tout $n \geq N$, on a $0 < u_n < 10^{-6}$:

$$u_n = \frac{1}{n} < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 10^6 \quad \text{car } n \text{ est un entier positif non nul}$$

Donc avec $N = 10^6 + 1$, on a bien : pour tout $n \geq N$, $0 < u_n < 10^{-6}$

Rigoureusement : Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer qu'il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$:

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{car } n \in \mathbb{N}^*$$

Donc avec N le premier entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, on a bien :

pour tout $n \geq N$, $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$

et donc la suite u_n est convergente et a pour limite $\ell = 0$

Limites de suites

Exemple 2 :

Étudiez la limite de la suite $u_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{car } n > 0 \text{ et } \varepsilon > 0$$

Donc si on prend $N = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$, on a bien :

pour tout $n \geq N$, on a $-\varepsilon < 0 < u_n < \varepsilon$

Et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Limites de suites

Définition 2 : (limite infinie d'une suite)

Soit A un réel quelconque.

(u_n) a pour **limite $+\infty$** \iff

Tout intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N

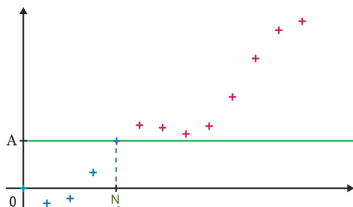
NB :

- on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- on dit aussi : (u_n) diverge vers $+\infty$
- on essaiera de prouver que :

pour tout A , il existe N tel que : pour tout $n \geq N$, $u_n > A$

- (u_n) a pour limite $-\infty \iff$ tout intervalle $] -\infty; A[$ contient \dots

pour tout A , il existe N tel que : pour tout $n \geq N$, $u_n < A$



Limites de suites

Exemple :

Étudiez la limite de la suite $u_n = 2n$

$$u_n = 2n > A \Leftrightarrow n > \frac{A}{2}$$

Donc si on prend $N = E\left(\frac{A}{2}\right) + 1$, on a bien :

pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$

Et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Limites de suites

Définition 3 : (divergence)

(u_n) **divergente** $\iff (u_n)$ non convergente

NB :

- une suite de limite infinie est divergente
- la réciproque est fautive (voir par exemple la suite $(-1)^n$)
- donc une suite a soit :
 - une limite finie ℓ (suite convergente)
 - une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$ (suite divergente)
 - pas de limite (suite divergente)

Limites de suites

Exemple :

Donner, sans démonstration, les limites des suites :

$$\left(\frac{1}{n}\right) (n) \left(-\frac{1}{n}\right) (-n) \left(\frac{1}{n^2}\right) (n^2) ((-2)^n) (1^n) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) (\sqrt{n}) \left(\frac{1}{n^p}\right) (n^p)$$

définie pour tout $n \in \mathbb{N}^$ et avec $p \in \mathbb{N}^*$*

limite finie avec $\ell = 0$: $\left(\frac{1}{n}\right) \left(-\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{1}{n^p}\right)$

limite finie avec $\ell = 1$: (1^n)

limite $+\infty$: $(n) (n^2) (\sqrt{n}) (n^p)$

limite $-\infty$: $(-n)$

pas de limite : $((-2)^n)$

Limites de suites

Table des matières :

2 Opérations sur les limites

- Limite d'une somme
- Limite d'un produit
- Limite d'un quotient

Limites de suites

Propriété 1 : (limite d'une somme)

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

NB : Une forme indéterminée ($F.I$) ne permet pas de conclure directement.

Limites de suites

Propriété 2 : (limite d'un produit)

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>F.I</i>

Limites de suites

Propriété 3 : (limite d'un quotient)

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ (selon règle des signes)	$\pm\infty$ (selon règle des signes)	<i>F.I</i>	<i>F.I</i>

Limites de suites

Exemple :

Déterminer la limite de :

a. $u_n = n^2 + n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Limites de suites

Exemple :

Déterminer la limite de :

a. $u_n = n^2 + n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n \times n) = +\infty \quad \text{par produit}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n) = +\infty \quad \text{par somme}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n - 1) = +\infty \quad \text{par somme}$$

Limites de suites

Exemple :

Déterminer la limite de :

b. $u_n = n^2 - n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Limites de suites

Exemple :

Déterminer la limite de :

b. $u_n = n^2 - n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n) \text{ est une F.I}$$

Mais on peut la lever par factorisation : $u_n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 1 \left. \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \left. \begin{array}{l} \text{par produit} \end{array} \right\}$$

Limites de suites

Exemple :

c. $u_n = \frac{n+1}{n^2+n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déterminer la limite de :

Limites de suites

Exemple :

Déterminer la limite de :

$$c. \quad u_n = \frac{n+1}{n^2+n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2+n+1) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1} \text{ est une F.I}$$

Mais on peut la lever par factorisation : $u_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ par quotient}$$

Limites de suites

Table des matières :

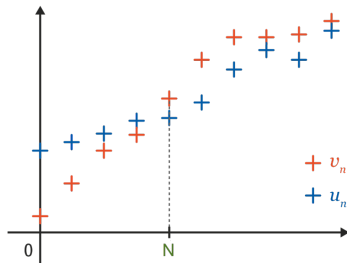
3 Limites et comparaison

- Comparaison à une suite divergente vers ∞
- Théorème des gendarmes
- Limite d'une suite géométrique

Limites de suites

Théorème 1 : (Comparaison à une suite divergente vers ∞)

Soit deux suites (u_n) et (v_n)



$$\left. \begin{array}{l} v_n \geq u_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} v_n \leq u_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

Limites de suites

Démonstration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \text{pour tout } A, \text{ il existe } N_1 \text{ tel que : pour tout } n \geq N_1, u_n > A \quad (1)$$

$$\text{Soit } N_2 \text{ le rang à partir duquel on a : pour tout } n \geq N_2, v_n \geq u_n \quad (2)$$

$$\text{Soit } N = \text{Max}(N_1; N_2) \quad (3)$$

$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow \text{pour tout } A, \text{ pour tout } n \geq N \geq N_1, u_n > A \quad (4)$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \text{pour tout } n \geq N \geq N_2, v_n \geq u_n \quad (5)$$

$$(4) \text{ et } (5) \Rightarrow \text{pour tout } A, \text{ pour tout } n \geq N, v_n \geq u_n > A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad \square$$

Limites de suites

Exemple :

Déterminer la limite de $u_n = n + \cos n$:

Limites de suites

Exemple : Déterminer la limite de $u_n = n + \cos n$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \cos n \geq -1 \Rightarrow n + \cos n \geq n - 1 \Rightarrow u_n \geq v_n \quad \text{avec } v_n = n - 1$$

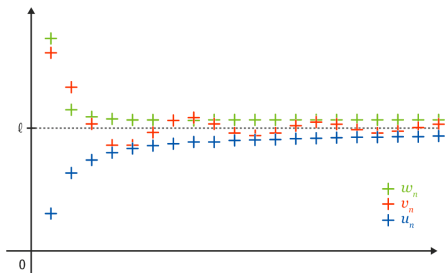
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \geq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Limites de suites

Théorème 2 : (théorème des gendarmes)

Soit trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .



$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq v_n \leq w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

Limites de suites

Démonstration : (étapes)

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc tous les termes de la suite sont dans I à partir d'un rang N_1

$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ donc tous les termes de la suite sont dans I à partir d'un rang N_2

On sait aussi que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang que l'on nomme N_3

Soit $N = \text{Max}(N_1; N_2; N_3)$

A partir du rang N , tous les termes des suites u_n et w_n sont dans I .

Et donc à partir du rang N , tous les termes de la suite v_n sont dans I .

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ \square

Limites de suites

Exemple : Déterminer la limite de $u_n = \frac{(-1)^n - \sin n}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Limites de suites

Exemple : Déterminer la limite de $u_n = \frac{(-1)^n - \sin n}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq (-1)^n \leq 1 \\ -1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin n \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \leq (-1)^n - \sin n \leq 2$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{n^2} \leq \frac{(-1)^n - \sin n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} \Rightarrow v_n \leq u_n \leq w_n \quad \text{avec } v_n = -\frac{2}{n^2} \text{ et } w_n = \frac{2}{n^2}$$

La suite (u_n) est encadrée par deux suites convergentes vers la même limite, on peut donc conclure en utilisant le théorème du sandwich :

$$\left. \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Limites de suites

Propriété 4 : (limite de q^n)

Soit la suite géométrique (q^n)

$$q > 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

$$-1 < q < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

$$q \leq -1 \quad \Longrightarrow \quad (q^n) \text{ n'a pas de limite}$$

$$q = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$$

Limites de suites

Exemple :

Déterminer la limite de :

a. $u_n = -2 \times 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b. $u_n = \frac{3}{(-2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Limites de suites

Exemple :

Déterminer la limite de :

a. $u_n = -2 \times 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$3 > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \times 3^n = -\infty$$

b. $u_n = \frac{3}{(-2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-1 < -\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Limites de suites

Démonstration : Cas $q > 1$

$$q > 1 \Rightarrow q = (1 + a) \quad \text{avec } a > 0$$

On a démontré par récurrence (dans le chapitre raisonnement) que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $(1 + a)^n \geq 1 + na$ avec a un réel positif

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ a > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$$

On peut utiliser le théorème de comparaison pour conclure :

$$\left. \begin{array}{l} q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

Limites de suites

Table des matières :

- 4 Limites de suites monotones
 - Majorée, minorée, bornée
 - Convergence de suites monotones
 - Suites croissantes et non majorées

Limites de suites

Définition 4 : (majorée, minorée, bornée)

Soit une suite (u_n) définie sur \mathbb{N}

(u_n) est **majorée** \iff Il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$

(u_n) est **minorée** \iff Il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$

(u_n) est **bornée** \iff (u_n) est **minorée et majorée**

NB :

- M est un majorant de (u_n)
- m est un minorant de (u_n)

Limites de suites

Exemple :

Déterminer si les suites suivantes sont

majorées, minorées, bornées, ni minorées ni majorées :

$$\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n) \quad \left(-\frac{1}{n}\right) \quad (-n) \quad ((-1)^n) \quad ((-1)^n \cdot n) \quad \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (\cos n) \quad (n(\cos n + 1))$$

définie pour tout $n \in \mathbb{N}^$*

Suites majorées :

Suites minorées :

Suites bornées :

Suites ni majorées ni minorées :

Limites de suites

Exemple :

Déterminer si les suites suivantes sont

majorées, minorées, bornées, ni minorées ni majorées :

$$\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n) \quad \left(-\frac{1}{n}\right) \quad (-n) \quad ((-1)^n) \quad ((-1)^n \cdot n) \quad \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (\cos n) \quad (n(\cos n + 1))$$

définie pour tout $n \in \mathbb{N}^$*

Suites majorées :

$$\left(\frac{1}{n}\right) \quad \left(-\frac{1}{n}\right) \quad (-n) \quad ((-1)^n) \quad \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (\cos n)$$

Suites minorées :

$$\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n) \quad \left(-\frac{1}{n}\right) \quad ((-1)^n) \quad \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (\cos n) \quad (n(\cos n + 1))$$

Suites bornées :

$$\left(\frac{1}{n}\right) \quad \left(-\frac{1}{n}\right) \quad ((-1)^n) \quad \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (\cos n)$$

Suites ni majorées ni minorées :

$$((-1)^n \cdot n)$$

Limites de suites

Théorème 3 : (convergence monotone)

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ majorée} \end{array} \right\} \implies (u_n) \text{ convergente}$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ minorée} \end{array} \right\} \implies (u_n) \text{ convergente}$$

NB :

- Ce théorème ne donne pas la limite de la suite.
- La limite d'une suite majorée, si elle existe, est inférieure ou égale au majorant.
- La limite d'une suite minorée, si elle existe, est supérieure ou égale au minorant.

Limites de suites

Exemple : *Soit la suite définie par :*
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. *Démontrer que la suite est majorée par 2 :*

b. *Démontrer que la suite est croissante :*

c. *Démontrer que la suite est convergente :*

Limites de suites

Exemple : Soit la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. *Démontrer que la suite est majorée par 2 :* on démontre par récurrence

Initialisation : $u_0 = 1 \leq 2$ donc P_0 est vrai

Hérédité : on suppose que $u_n \leq 2$ pour un certain rang n (HR)

$u_n \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2 \Rightarrow u_{n+1} \leq 2$ donc P_n est héréditaire

Conclusion : P_n est initialisée pour 0 et est héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$

b. *Démontrer que la suite est croissante :* $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$

$u_n \leq 2 \Rightarrow -u_n \geq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2}u_n + 1 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow (u_n)$ est croissante

c. *Démontrer que la suite est convergente :* la suite est majorée et croissante donc convergente d'après le théorème de la convergence monotone (sa limite est inférieure ou égale à 2)

Limites de suites

Propriété 5 : (suites croissantes et non majorées)

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ non majorée} \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ non minorée} \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Limites de suites

Démonstration :

Soit une suite (u_n) une suite croissante et non majorée, et soit A un réel

(u_n) non majorée \Rightarrow il existe au moins un entier naturel N tel que $u_N > A$
(1)

(u_n) croissante \Rightarrow pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N$ (2)

(1) et (2) \Rightarrow il existe N tel que : pour tout $n \geq N$, $u_n > A$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ \square