Vecteurs, droites et plans de l'espace

MatheX

8 décembre 2023

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Table des matières :

1. Vecteurs de l'espace
2. Positions relatives
3. Repérage dans l'espace

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Table des matières :

1. Vecteurs de l'espace
   - Définition vecteur de l'espace
   - Opération sur les vecteurs
   - Parallélisme et alignement
   - Vecteurs coplanaires
   - Combinaisons linéaires
   - Coplanarité et dépendance

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Définition 1 : (Définition vecteur de l'espace)

Soit A et B deux points de l'espace.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la translation qui transforme A en B.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

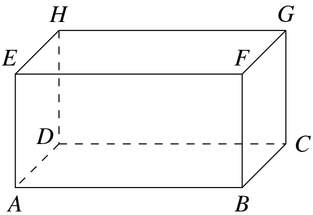
1. sa direction : celle de (AB) ;
2. son sens : celui de A vers B ;
3. sa norme : la longueur AB (notée $\|\overrightarrow{AB}\|$).

NB :
– deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.
– deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Vecteurs, droites et plans de l'espace

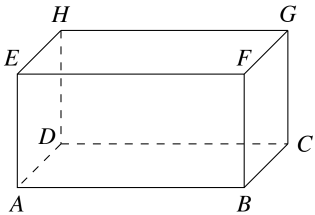
Exemple :

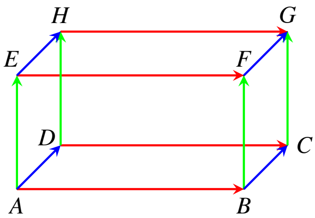
Donnez des vecteurs égaux du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

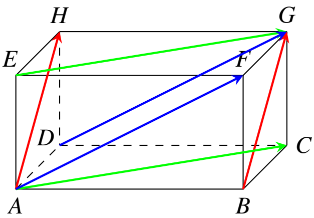


Vecteurs, droites et plans de l’espace

Exemple : *Donnez des vecteurs égaux du parallélépipède rectangle ABCDEFGH .*







Vecteurs, droites et plans de l'espace

Propriété 1 : (opération sur les vecteurs)

Relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \iff ABCD \text{ est un parallélogramme}$$

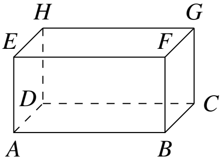
Produit par un scalaire :

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \text{ avec } \lambda \text{ un réel} \iff \begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même direction} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont le même sens si } \lambda > 0 \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire si } \lambda < 0 \\ \|\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{v}\| \end{cases}$$

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple :

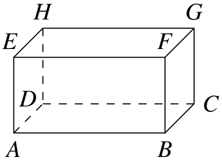
Soit le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
Décomposer $\overrightarrow{AG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AE}$.



Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple :

Soit le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
Décomposer $\overrightarrow{AG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AE}$.

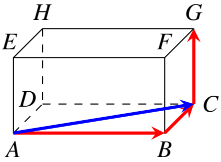


D'après la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

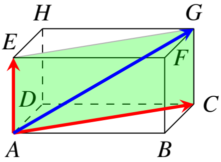
Or $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$



Ou directement avec la règle du parallélogramme :

$ACGE$ parallélogramme donc $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$



Vecteurs, droites et plans de l'espace

Propriété 2 : (parallélisme et alignement)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires $\iff$ il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$

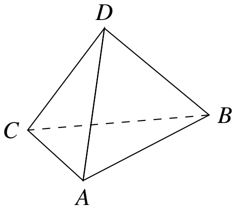
(AB) et (CD) sont parallèles $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

A, B *et* C sont alignés $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple :

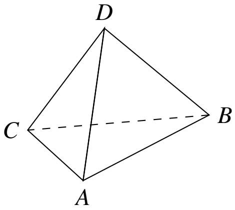
Soit le tétraèdre ABCD et k un réel.
Soit le point I tel que $\overrightarrow{DI} = k\overrightarrow{DA}$.
Soit le point J tel que $\overrightarrow{DJ} = k\overrightarrow{DB}$.
Montrer que (IJ) *et* (AB) *sont parallèles.*



Vecteurs, droites et plans de l'espace

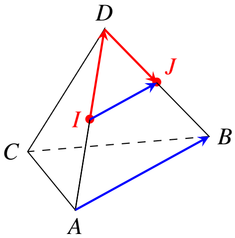
Exemple :

Soit le tétraèdre $ABCD$ et k un réel.
Soit le point I tel que $\overrightarrow{DI} = k\overrightarrow{DA}$.
Soit le point J tel que $\overrightarrow{DJ} = k\overrightarrow{DB}$.
Montrer que (IJ) et (AB) sont parallèles.



$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DJ} = -k\overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{DB}$$
$$= k\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) = k\overrightarrow{AB}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Donc les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.



Vecteurs, droites et plans de l'espace

Définition 2 : (vecteurs coplanaires)

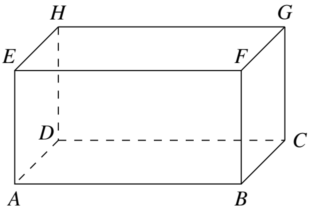
Les points A, B, C et D sont coplanaires $\Longleftrightarrow$ Les points A, B, C et D appartiennent à un même plan

Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Soit un point quelconque O et les points A, B et C tels que :
$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Longleftrightarrow$ Les points O, A, B et C sont coplanaires

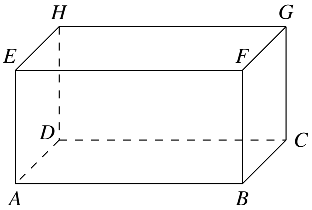
Vecteurs, droites et plans de l'espace

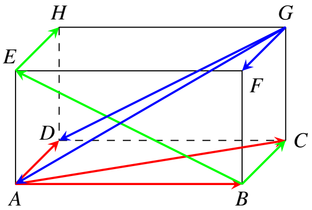
Exemple : *Donnez des vecteurs coplanaires et d'autres non coplanaires du parallélépipède rectangle ABCDEFGH .*



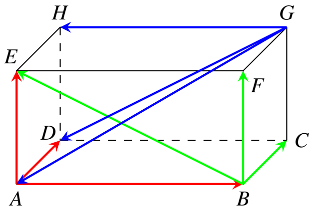
Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple : *Donnez des vecteurs coplanaires et d'autres non coplanaires du parallélépipède rectangle ABCDEFGH .*





Vecteurs coplanaires

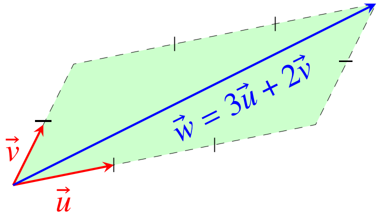


Vecteurs non coplanaires

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Définition 3 : (définition combinaison linéaire)

Le vecteur $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\Longleftrightarrow$ Il existe deux réels a et b tels que $\boxed{\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}}$



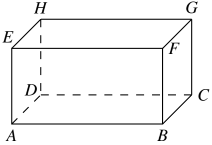
NB : on dit aussi que les trois vecteurs sont alors linéairement dépendants.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement indépendants** $\Leftrightarrow \left(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0\right)$

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple :

Soit le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
Écrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs :



a. $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ *:*

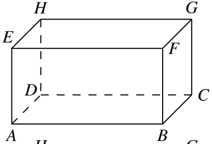
b. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ *:*

c. $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ *:*

Vecteurs, droites et plans de l'espace

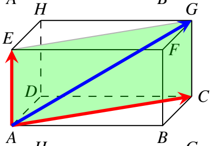
Exemple :

Soit le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
Écrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ *comme une combinaison linéaire des vecteurs :*



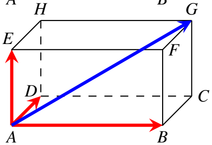
a. $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ *:*

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$



b. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ *:*

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$



c. $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ *:*

Impossible, il manque la profondeur ...

Les trois vecteurs sont linéairement indépendants.

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Propriété 3 : (coplanarité)

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** $\Longleftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants

$\Longleftrightarrow$ il existe des réels a, b et c non tous nuls tel que $\boxed{a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}}$

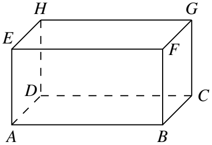
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **non coplanaires** $\Longleftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\left(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \;\Rightarrow\; a = b = c = 0\right)}$

Vecteurs, droites et plans de l’espace

Exemple :

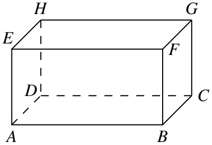
Soit le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{IJ}$ *et* $\overrightarrow{DH}$ *sont coplanaires.*



Vecteurs, droites et plans de l'espace

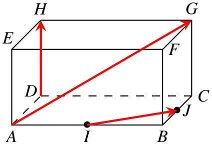
Exemple :

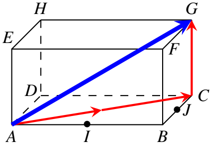
Soit le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} \\
&= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DH} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DH} \\
&= 2\,\overrightarrow{IB} + 2\,\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DH} \\
&= 2\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}\right) + \overrightarrow{DH} \\
&= 2\,\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DH}
\end{aligned}$$

Les 3 vecteurs sont linéairement dépendants.
Donc ils sont coplanaires.





Vecteurs, droites et plans de l'espace

Table des matières :

2 Positions relatives

- Positions relatives de deux droites
- Direction d'un plan
- Positions relatives de deux plans
- Positions relatives d'une droite et d'un plan

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Propriété 4 : (positions relatives de deux droites)

Deux droites de l'espace peuvent être :

- soit coplanaires et :
  - soit sécantes ;
  - soit parallèles et :
    - soit disctinctes ;
    - soit confondues ;
- soit non coplanaires.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et $\vec{u'}$ un vecteur directeur de d', on a :

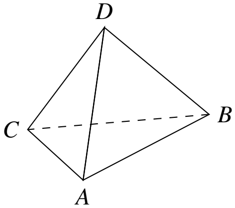
$$\vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ colinéaires} \implies d \text{ et } d' \text{ parallèles} \implies d \text{ et } d' \text{ coplanaires}$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ non colinéaires} \Rightarrow d \text{ et } d' \text{ non parallèles} \\ d \text{ et } d' \text{ coplanaires} \end{array}\right\} \Rightarrow d \text{ et } d' \text{ sécantes}$$

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple :

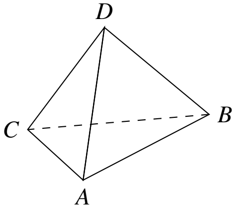
Soit le tétraèdre ABCD.
Soit le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.
Soit le point J tel que $\overrightarrow{DJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
Démontrer que (IJ) *et* (AB) *sont sécantes.*



Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple :

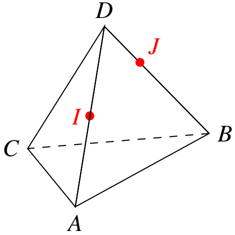
Soit le tétraèdre ABCD.
Soit le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.
Soit le point J tel que $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
Démontrer que (IJ) *et* (AB) *sont sécantes.*



$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.
Par ailleurs (IJ) et (AB) sont coplanaires car A, B, J et D appartiennent au plan (ABD).
Donc les droites (IJ) et (AB) sont sécantes.



Vecteurs, droites et plans de l'espace

Définition 4 : (direction d'un plan)

La direction d'un plan est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ avec A et B deux points disctincts de ce plan.

NB :

Deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la direction du plan suffisent pour définir la direction du plan.

En effet, on aura pour tous les points A et B du plan : $\overrightarrow{AB} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Propriété 5 : (positions relatives de deux plans)

Deux plans peuvent être :

- soit parallèles et :
  - soit distincts ;
  - soit confondus ;
- soit sécants : leur intersection est alors une droite.

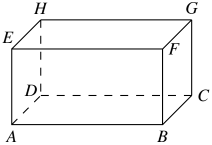
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan $\mathscr{P}$.
Soit $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan $\mathscr{P}'$.
On a :

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ colinéaires} \\ \vec{v} \text{ et } \vec{v'} \text{ colinéaires}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P}' \text{ parallèles.}$$

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple :

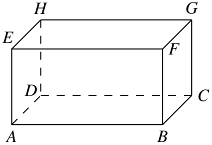
Soit le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
Soit I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[CG]$.
Soit K le milieu de $[AE]$ et L le milieu de $[EH]$.
Démontrer que les plans (AIJ) et (GKL) sont parallèles.



Vecteurs, droites et plans de l'espace

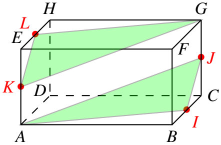
Exemple :

Soit le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [CG].
Soit K le milieu de [AE] et L le milieu de [EH].
Démontrer que les plans (AIJ) et (GKL) sont parallèles.



$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{KL} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ colinéaires (1)

$\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GL} \Rightarrow \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{GL}$ colinéaires (2)



$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IA}$ deux vecteurs non colinéaires de (AIJ) (3)

$\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{GL}$ deux vecteurs non colinéaires de (GKL) (4)

(1) et (2) et (3) et (4) $\Longrightarrow$ (AIJ) et (GKL) parallèles.

Propriété 6 : (positions relatives d'une droite et d'un plan)

Une droite peut être :

- soit parallèle à un plan et :
  - soit disctinct, ils n'ont alors aucun point commun ;
  - soit la droite est incluse dans le plan ;
- soit sécantes à un plan, ils ont alors un unique point commun.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite d.
Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan $\mathscr{P}$.
On a :

$\vec{u}$ colinéaire à un vecteur de la direction de $\mathscr{P} \implies d$ et $\mathscr{P}$ parallèles

$\vec{u}$ combinaisons linéaires de $\vec{v}$ et $\vec{w} \implies d$ et $\mathscr{P}$ parallèles

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Table des matières :

3 Repérage dans l'espace

- Base, repère et coordonnées
- Règles de calcul
- Représentation paramétrique d'une droite

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Définition 5 : (base, repère et coordonnées)

Une base de l'espace est définie par 3 vecteurs non coplanaires de l'espace. On la note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont le triplet $(x; y; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Un repère de l'espace est défini par un point de l'espace, l'origine du repère, et une base de l'espace. On le note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les coordonnées d'un point de l'espace M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont le triplet $(x;\ y;\ z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Propriété 7 : (règles de calculs)

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Soit les points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.
Soit I le milieu de $[AB]$.

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

$k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$

$I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

$$\vec{u}=\vec{v} \iff \begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$$

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple :

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Théorème 1 : (représentation paramétrique d'une droite)

Soit une droite d, un point $A(x_A\,;\,y_A;\,z_A)$ de d et $\vec{u}\,(u_x\,;\,u_y\,;\,u_z)$ un vecteur directeur de d.

La droite d admet le système d'équations paramétriques suivant :

$$\boxed{d\ :\ \begin{cases} x = x_A + u_x\,t \\ y = y_A + u_y\,t \\ z = z_A + u_z\,t \end{cases} ,\ \text{avec } t \in \mathbb{R}}$$

NB : la représentation paramétrique de d n'est pas unique.

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Démonstration :

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}(u_x; u_y; u_z) \text{ vecteur directeur de } d \\ A(x_A; y_A; z_A) \in d \\ M(x; y; z) \in d\end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x - x_A) = t\,u_x \\ (y - y_A) = t\,u_y \\ (z - z_A) = t\,u_z\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = x_A + t\,u_x \\ y = y_A + t\,u_y \\ z = z_A + t\,u_z\end{array}\right. \qquad \square$$

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple : *Soit les points $A(1;0;0)$, $B(2,1,1)$, $C(2,0,0)$ et $D(0;3;3)$*
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes,
puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exemple : *Soit les points $A(1;0;0)$, $B(2,1,1)$, $C(2,0,0)$ et $D(0;3;3)$ Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes, puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.*

On établit une représentation paramétrique de chaque droite :

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \qquad (CD) : \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3t' \\ z = 3t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}$$

Puis on cherche si les deux droites ont un unique point commun en résolvant le système correspondant :

$$\begin{cases} 1 + t = 2 - 2t' \\ t = 3t' \\ t = 3t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 3t' = 2 - 2t' \\ t = 3t' \\ t = 3t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{1}{5} \\ t = \dfrac{3}{5} \\ t = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$$