Nom : .... **Prénom** : .... **Classe** : ....

Correction Évaluation 01

Récurrence, Limites de suites

Durée de l'épreuve : **20 minutes**

Le candidat répond sur l'énoncé.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (5 points)

Montrer que, pour tout entier naturel non nul : $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Soit la propriété P_n : $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

○ Initialisation :
avec $n=1$, $1\times 2=2$ et $\dfrac{1\times 2\times 3}{6}=2$ donc P_1 est vraie et la propriété est initialisée.

○ Hérédité :
on suppose P_k vraie à un certain rang k, on a donc :

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3} \qquad (HR)$$

On essaie de montrer que P_{k+1} est vraie, c'est à dire que :

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3} \qquad (HR)$$

$$\Rightarrow \quad 1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$\Rightarrow \quad 1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

donc P_{k+1} est vraie et la propriété est héréditaire

○ Conclusion :
la propriété est initialisée au rang 1 et est héréditaire, donc par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel non nul.

Exercice 2 (5 points)

Déterminer la limite de la suite définie pour tout entier naturel par : $u_n = \dfrac{5n+10}{1+2n-n^2}$

$$u_n = \frac{5n+10}{1+2n-n^2} = \frac{5n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{-n^2\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = -\frac{5}{n} \times \frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1 \quad \text{par somme} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = 1 \quad \text{par somme} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} = 1 \quad \text{par quotient}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{5}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{par produit}$$

