Correction évaluation 01

Ch1 : Raisonnement par récurrence
Ch2 : Limites de suites

Durée de l'épreuve : **00h25**

Question 1 - DROITE

Démontrer que pour tout entier naturel n , $1+3n \leq 4^n$

Soit la propriété P_n : $1+3n \leq 4^n$

○ Initialisation :
avec $n=0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ donc $(1+a)^0 \geq 1+0\times a$
donc P_0 est vraie et la propriété est initialisée.

○ Hérédité :
on suppose P_n vraie à un certain rang n, on a donc $1+3n \leq 4^n \qquad (HR)$
On essaie de montrer que P_{n+1} est vraie, c'est à dire que : $1+3(n+1) \leq 4^{n+1} \Leftrightarrow 4+3n \leq 4^{n+1}$

$1+3n \leq 4^n \qquad (HR)$
$\Rightarrow \quad (1+3n)\times 4 \leq 4^n \times 4 \qquad$ car $4>0$
$\Rightarrow \quad 4+3n \leq 4+3n+9n \leq 4^{n+1} \qquad$ car $n \geq 0$
$\Rightarrow \quad 4+3n \leq 4^{n+1} \qquad$ par transitivité
donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire

○ Conclusion :
la propriété est initialisée et héréditaire, donc par le principe de récurrence, on a bien :
$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$

Question 2 - GAUCHE

Déterminer la limite de la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{-2n^2+3n-1}{-2n+3} \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{-2n^2\left(1-\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{2n^2}\right)}{-2n\left(1-\dfrac{3}{2n}\right)} = \frac{n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1-\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{2n^2}}{1-\dfrac{3}{2n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{1-\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{2n^2}}{1-\dfrac{3}{2n}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{2n^2}\right) = 1 \quad \text{par somme} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{2n}\right) = 1 \quad \text{par somme} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{2n^2}}{1-\dfrac{3}{2n}} = 1 \quad \text{par quotient}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{3}{2n}+\dfrac{1}{2n^2}}{1-\dfrac{3}{2n}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{par produit}$$

