

**DS07**

## Suites et matrices

Durée de l'épreuve : **35 minutes***L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.**Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.***Exercice 1**

Chaque jour, le prof raconte une blague, les élèves la trouvent soit drôle (D), soit pas drôle (P).

Si un élève trouve une blague drôle, la probabilité pour qu'il trouve la suivante drôle est de  $\frac{2}{3}$ .

Si un élève trouve une blague pas drôle, la probabilité pour qu'il trouve la suivante pas drôle est de  $\frac{2}{3}$ .

Le premier jour les élèves trouvent la blague drôle avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$ .

1. Traduire les données de l'énoncé par des probabilités.
2. Représenter la chaîne de markov associée à cette situation et déterminer sa matrice de transition (les sommets étant classés par ordre alphabétique).
3. Déterminer les trois premières distributions.
4. Déterminer la distribution invariante.
5. On modifie la situation avec un troisième état moyennement drôle (M), la probabilité de rester dans le même état est toujours de  $\frac{2}{3}$ , le reste étant équitablement réparti. Tous les élèves trouvent la première blague drôle.
  - a. Représenter la chaîne de markov associée à cette situation et déterminer sa matrice de transition (les sommets étant classés par ordre alphabétique).
  - b. Déterminer la distribution invariante.

**Exercice 2**

Soit  $A$  une matrices carré d'ordre  $k$ ,  $I$  la matrice identité d'ordre  $k$  et  $B$  une matrice colonne de taille  $k \times 1$ .

Soit  $(U_n)$  une suite de matrices colonnes, de premier terme  $U_0$ , définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

On suppose qu'il existe une matrice colonne  $C$  qui vérifie :  $C = AC + B$

On considère alors la suite de matrices colonnes  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$V_n = U_n - C$$

1. Montrer que  $V_{n+1} = AV_n$ .
2. En déduire une expressions  $V_n$  en fonction de  $n$ , puis de  $U_n$  en fonction de  $n$ .
3. Montrer que l'hypothèse : il existe une matrice  $C$  qui vérifie  $C = AC + B$  est équivalente à :  $(I - A)$  est inversible et  $C = (I - A)^{-1}B$