

DS04

Matrice

Durée de l'épreuve : **55 minutes***L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.**Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.*

Exercice 1 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Lorsque cela est possible, calculer :

1. $2A + B$
2. $A \times B$ et $B \times A$
3. A^2 et B^2
4. C^{-1}

Exercice 2

1. Déterminer, par un calcul matriciel, le prix d'une pomme et celui d'une banane sachant que d'une part 3 pommes et 2 bananes valent 15 Dh, et que d'autre part 2 pommes et 3 bananes valent 16 Dh.
2. Déterminer, par un calcul matriciel, l'image du point $M(x; y)$ par la rotation de centre $A(1; -2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 3

On considère le graphe dont la matrice d'adjacence obtenue en classant ses sommets A, B, C, D, E dans l'ordre alphabétique est :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Représenter ce graphe avec ses sommets et ses arêtes.
2. Déterminer le nombre de chemins de longueur 1 entre les sommets C et D .
3. Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 entre les sommets A et B .

Exercice 4 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer $D = P^{-1}AP$.
2. En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice bonus (optionnel) : déterminer la formule de l'inverse d'une matrice d'ordre 2 par une démarche d'analyse.