

Proportion et évolution

MatheX

19 mai 2021



Proportion et évolution

Table des matières :

1 Proportion

2 Évolution

Proportion et évolution

Table des matières :

- 1 Proportion
 - Définition proportion
 - Proportion de proportion

Proportion et évolution

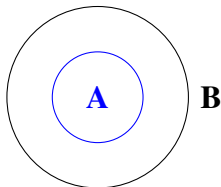
Définition 1 : (proportion)

Soit deux populations (ensembles) A et B telque $A \subset B$

Soit n_A le nombre d'individus de A et n_B le nombre d'individus de B

La **proportion** (ou fréquence) de A dans B est :

$$p = \frac{n_A}{n_B}$$



Proportion et évolution

Exemple :

Calculez :

- la proportion de filles p_F dans une classe de 24 élèves avec 14 filles
- la proportion de garçons p_G dans la classe précédente
- le nombre d'élèves n d'une classe de 12 filles avec une proportion de filles $p_F = 60\%$

Proportion et évolution

Exemple :

Calculez :

- a. la proportion de filles p_F dans une classe de 24 élèves avec 16 filles

$$p_F = \frac{\text{nombre de filles}}{\text{nombre d'élèves}} = \frac{n_F}{n} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

- b. la proportion de garçons p_G dans la classe précédente

$$p_G = \frac{\text{nombre de garçons}}{\text{nombre d'élèves}} = \frac{n_G}{n} = \frac{24 - 16}{24} = \frac{1}{3}$$

- c. le nombre d'élèves n d'une classe de 12 filles avec une proportion de filles $p_F = 60\%$

$$p_F = \frac{n_F}{n} \Rightarrow n = \frac{n_F}{p_F} = \frac{12}{\frac{60}{100}} = \frac{12 \times 100}{60} = 20$$

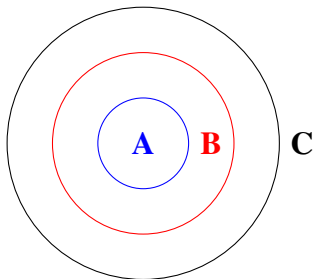
Proportion et évolution

Propriété 1 : (proportion de proportion)

Soit trois populations A , B , C avec $A \subset B \subset C$

La proportion de A dans C est :

$$p_{A/C} = p_{A/B} \times p_{B/C}$$



Proportion et évolution

Exemple :

*Soit une classe avec 60% de filles
Parmi ces filles, 80% vont choisir la spé Maths en 1ère.
Calculez la proportion de filles spé Maths dans la classe :*

Proportion et évolution

Exemple :

*Soit une classe avec 60% de filles
Parmi ces filles, 80% vont choisir la spé Maths en 1ère.
Calculez la proportion de filles spé Maths dans la classe :*

Soit les populations :

C : "élèves de la classe"

F : "filles de la classe"

FM : "filles de la classe ayant choisi spé Maths"

On a bien $FM \subset F \subset C$ et donc :

$$P_{FM/C} = P_{FM/F} \times P_{F/C} = 80\% \times 60\% = \frac{80}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{48}{100} = 48\%$$

Proportion et évolution

Démonstration :

Soit n_A , n_B et n_C le nombre d'individus respectivement dans A , B et C

$$p_{A/C} = \frac{n_A}{n_C} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{n_B}{n_C} = p_{A/B} \times p_{B/C} \quad \square$$

Table des matières :

2 Évolution

- Variation
- Coefficient multiplicateur
- Taux de variation et Coefficient multiplicateur
- Évolutions successives

Proportion et évolution

Définition 2 : (variation)

Soit une quantité qui varie :

- d'une valeur de départ v_d
- à une valeur d'arrivée v_a

Sa variation absolue est :

$$v_a - v_d$$

Sa variation relative est :

$$\frac{v_a - v_d}{v_d}$$

NB : La variation relative est aussi appelée taux d'évolution

Proportion et évolution

Exemple :

Soit deux élèves dont les notes évoluent au cours de l'année :

○ élève 1 : $10 \rightarrow 12$

○ élève 2 : $14 \rightarrow 16$

Comparer leur variation absolue puis leur variation relative

Proportion et évolution

Exemple : *Soit deux élèves dont les notes évoluent au cours de l'année :*

- élève 1 : $10 \rightarrow 12$

- élève 2 : $14 \rightarrow 16$

Comparer leur variation absolue puis leur variation relative

○ Variation absolue :

- élève 1 : $v_a - v_d = 12 - 10 = 2$

- élève 2 : $v_a - v_d = 16 - 14 = 2$

Les deux élèves ont la même variation absolue

○ Variation relative :

- élève 1 : $\frac{v_a - v_d}{v_d} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$

- élève 2 : $\frac{v_a - v_d}{v_d} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \approx 14\%$

Le taux d'évolution de l'élève 1 est meilleur.

Proportion et évolution

Définition 3 : (coefficient multiplicateur)

Soit une quantité qui varie :

- d'une valeur de départ v_d
- à une valeur d'arrivée v_a

Son **coefficient multiplicateur** est :

$$c = \frac{v_a}{v_d}$$

$$v_d \xrightarrow{\times c} v_a$$

Le **coefficient multiplicateur réciproque** est l'inverse de c :

$$c_r = \frac{1}{c} = \frac{v_d}{v_a}$$

$$v_d \xleftarrow{\times c_r} v_a$$

Proportion et évolution

Exemple : *Soit deux élèves dont les notes évoluent au cours de l'année :*

○ élève 1 : $10 \rightarrow 12$

○ élève 2 : $14 \rightarrow 16$

Comparer leur coefficient multiplicateur et leur coefficient multiplicateur réciproque

Proportion et évolution

Exemple : *Soit deux élèves dont les notes évoluent au cours de l'année :*

- élève 1 : $10 \rightarrow 12$
- élève 2 : $14 \rightarrow 16$

Comparer leur coefficient multiplicateur et leur coefficient multiplicateur réciproque

○ Coefficient multiplicateur :

- élève 1 : $c = \frac{v_a}{v_d} = \frac{12}{10} = 1,2$

- élève 2 : $c' = \frac{v_a}{v_d} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \approx 1,14 \quad \implies c > c'$

○ Coefficient multiplicateur réciproque :

- élève 1 : $c_r = \frac{1}{c} = \frac{v_d}{v_a} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0,83$

- élève 2 : $c'_r = \frac{1}{c'} = \frac{v_d}{v_a} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8} = 0,875 \quad \implies c_r < c'_r$

Proportion et évolution

Propriété 2 : (taux de variation et coefficient multiplicateur)

coefficient multiplicateur = 1 + taux d'évolution

Démonstration :

$$\begin{aligned}1 + \text{taux d'évolution} &= 1 + \frac{v_a - v_d}{v_d} \\ &= \frac{v_d}{v_d} + \frac{v_a - v_d}{v_d} \\ &= \frac{v_a}{v_d} = \text{coefficient multiplicateur} \quad \square\end{aligned}$$

Proportion et évolution

Exemple :

*La moyenne d'un élève baisse de 20%.
Calculer le taux d'évolution nécessaire pour revenir à la note initiale :*

Proportion et évolution

Exemple :

La moyenne d'un élève baisse de 20%.

Calculer le taux d'évolution nécessaire pour revenir à la note initiale :

○ Coefficient multiplicateur :

$$c = 1 + t = 1 - 20\% = 0,8$$

○ Coefficient multiplicateur réciproque :

$$c_r = \frac{1}{c} = \frac{1}{0,8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

○ Taux d'évolution réciproque :

$$t_r = c_r - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} = 25\%$$

Il devra augmenter de 25% (et non pas de 20% !!!)

Proportion et évolution

Propriété 3 : (évolutions successives)

Soit une quantité qui varie de v_1 à v_2 : $v_1 \xrightarrow{\times c_1} v_2$ avec $c_1 = \frac{v_2}{v_1}$

Ensuite, elle varie de v_2 à v_3 : $v_2 \xrightarrow{\times c_2} v_3$ avec $c_2 = \frac{v_3}{v_2}$

Alors, son évolution globale a pour coefficient multiplicateur global :

$$\boxed{c_g = c_1 \times c_2} \quad v_1 \xrightarrow{\times c_g} v_3 \quad \text{avec } c_g = \frac{v_3}{v_1}$$

Démonstration : $c_g = \frac{v_3}{v_1} = \frac{v_3 \times v_2}{v_1 \times v_2} = \frac{v_3}{v_2} \times \frac{v_2}{v_1} = c_2 \times c_1 \quad \square$

Proportion et évolution

Exemple :

La moyenne d'un élève évolue de :

- *+20% du 1er trimestre (T1) au 2ème trimestre (T2)*
- *+30% du 2ème trimestre (T2) au 3ème trimestre (T3)*

Calculer son évolution globale au cours de l'année (de T1 à T3) :

Proportion et évolution

Exemple :

La moyenne d'un élève évolue de :

- *+20% du 1er trimestre (T1) au 2ème trimestre (T2)*
- *+30% du 2ème trimestre (T2) au 3ème trimestre (T3)*

Calculer son évolution globale au cours de l'année (de T1 à T3) :

- Coefficient multiplicateur T1 à T2 :

$$c_1 = 1 + t_1 = 1 + 20\% = 1,2$$

- Coefficient multiplicateur T2 à T3 :

$$c_2 = 1 + t_2 = 1 + 30\% = 1,3$$

- Coefficient multiplicateur global (de T1 à T3) :

$$c_g = c_1 \times c_2 = 1,2 \times 1,3 = 1,56 = 1 + 56\%$$

Sa note a augmenté durant l'année de 56% (et non pas de 50% !!!)