Nombres et Calcul Numérique

MatheX

26 août 2021

Nombres et Calcul Numérique

Table des matières :

Nombres et Calcul Numérique

Table des matières :

Nombres et Calcul Numérique

Définition 1 : (Ensemble de nombres)

$\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels (positifs)
$\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs (positifs et négatifs)
$\mathbb{D}$: Ensemble des nombres décimaux ($\frac{a}{10^n}$ avec a entier)
$\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels ($\frac{a}{b}$ avec a et b entiers)
$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels (abscisses des points d'une droite graduée)

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Trouvez les erreurs :

N	0	1	2	-1	1,25	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{2}$	$\sqrt{2}$	π
Z	0	1	2	-1	1,25	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{2}$	$\sqrt{2}$	π
D	0	1	2	-1	1,25	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{2}$	$\sqrt{2}$	π
Q	0	1	2	-1	1,25	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{2}$	$\sqrt{2}$	π
R	0	1	2	-1	1,25	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{2}$	$\sqrt{2}$	π

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Trouvez les erreurs :

N	0	1	2					$\frac{10}{2}$		
Z	0	1	2	-1				$\frac{10}{2}$		
D	0	1	2	-1	1,25	$\frac{9}{2}$		$\frac{10}{2}$		
Q	0	1	2	-1	1,25	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{2}$		
R	0	1	2	-1	1,25	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{2}$	$\sqrt{2}$	π

Nombres et Calcul Numérique

Table des matières :

Nombres et Calcul Numérique

Définition 2 : (multiple, diviseur, divisible)

Soit a et b deux entiers.

a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que :

$$\boxed{a = k \times b}$$

On peut aussi dire :

- b est un diviseur de a (a divisé par b est un entier)
- b divise a
- a est divisible par b

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Formulez un maximum de phrases avec les mots diviseur, divise et divisible et les nombres 3, 9 et 27 :

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Formulez un maximum de phrases avec les mots diviseur, divise et divisible et les nombres 3, 9 et 27 :

9 est un diviseur de 27

3 est un diviseur de 27

3 divise 9 et 27

9 divise 27

27 est divisible par 9 et par 3

9 est divisible par 3

Nombres et Calcul Numérique

Définition 3 : (pair et impair)

Un nombre pair est un nombre entier multiple de 2 :

$$\boxed{a = 2k \text{ avec } k \text{ entier}}$$

Un nombre impair est un nombre entier non multiple de 2 :

$$\boxed{a = 2k + 1 \text{ avec } k \text{ entier}}$$

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Démontrez que 16 est pair et que 17 est impair :

Soit n_1 *un entier pair,* n_2 *un entier quelconque et* $n = n_1 \times n_2$
Démontez que n *est pair :*

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Démontrez que 16 est pair et que 17 est impair :

$16 = 2 \times 8 \quad \Rightarrow \quad 16 = 2 \times k$ avec k entier $\quad \Rightarrow \quad$ 16 est pair

$17 = 2 \times 8 + 1 \quad \Rightarrow \quad 16 = 2 \times k + 1$ avec k entier
$\Rightarrow \quad$ 17 impair

Soit n_1 un entier pair, n_2 un entier quelconque et $n = n_1 \times n_2$
Démontez que n est pair :

n_1 pair $\quad \Rightarrow \quad n_1 = 2k$ avec k entier $\quad \Rightarrow \quad n = 2k.n_2$
$\Rightarrow \quad n = 2k'$ avec k' entier $\quad \Rightarrow n$ est pair

Nombres et Calcul Numérique

Propriété 1 : (parité du carré)

Le carré d'un nombre conserve la parité :

- si n est pair alors n^2 est pair
- si n est impair alors n^2 est impair

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

2 pair $\Rightarrow \; 2^2 = 4$ pair

3 impair $\Rightarrow \; 3^2 = 9$ impair

Démonstration pair :

Démonstration impair :

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

2 pair $\Rightarrow\ 2^2 = 4$ pair

3 impair $\Rightarrow\ 3^2 = 9$ impair

Démonstration pair :

$$\begin{aligned}
&n \text{ pair} \quad \Rightarrow \quad n = 2k \ \text{ avec } k \text{ entier} \quad \Rightarrow \quad n^2 = (2k)^2 \\
&\Rightarrow \quad n^2 = 2k \times 2k \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2(2k^2) \\
&\Rightarrow \quad n^2 = 2k' \text{ avec } k' \text{ entier} \quad \Rightarrow n \text{ est pair}
\end{aligned}$$

Démonstration impair :

$$\begin{aligned}
&n \text{ impair} \quad \Rightarrow \quad n = 2k+1 \ \text{ avec } k \text{ entier} \quad \Rightarrow \quad n^2 = (2k+1)^2 \\
&\Rightarrow \quad n^2 = (2k+1) \times (2k+1) \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2k \times 2k + 2k + 2k + 1 \\
&\Rightarrow \quad n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2k' + 1 \text{ avec } k' \text{ entier} \\
&\Rightarrow \quad n \text{ est impair}
\end{aligned}$$

Nombres et Calcul Numérique

Définition 4 : (nombre premier)

Un nombre premier est un entier positif non nul qui a exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Trouvez les onze premiers nombres premiers :

Un nombre pair peut-il être premier ? Démontrez le :

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Trouvez les onze premiers nombres premiers :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31

NB : 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur (lui-même)

Un nombre pair peut-il être premier ? Démontrez le :

Le seul nombre pair premier est 2
Un nombre pair différent de 2 n'est pas premier car il a au moins 3 diviseurs positifs : 1, 2 et lui-même

Propriété 2 : (décomposition)

Tout nombre entier se décompose de manière unique (à l'ordre près) en produit de nombres premiers.

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Décomposez en produit de facteurs premiers :

a. $30 =$

b. $24 =$

c. $1400 =$

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Décomposez en produit de facteurs premiers :

a. $30 = 2 \times 3 \times 5$

b. $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

c. $1400 = 14 \times 100 = 7 \times 2 \times 10 \times 10 = 7 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2$
$= 2^3 \times 5^2 \times 7$

Nombres et Calcul Numérique

Table des matières :

Définition 5 : (Puissance)

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, " a puissance n est égale à :

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

Pour $n = 1$: $a^1 = a$

Pour $n = 0$ et $a \neq 0$: $a^0 = 1$

Pour tout entier naturel n et $a \neq 0$: $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Calculez :

$a.\quad 3^2 =$

$b.\quad 2^3 =$

$c.\quad 10^5 =$

$d.\quad 2^{-3} =$

$e.\quad 10^{-5} =$

$f.\quad 7^0 =$

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Calculez :

a. $3^2 = 3 \times 3 = 9$

b. $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

c. $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$

d. $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

e. $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = \dfrac{1}{100\,000} = 0{,}000\,01$

f. $7^0 = 1$

Définition 6 : (racine carrée)

La racine carrée d'un réel positif a est le réel positif noté $\sqrt{a}$ tel que :

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$$

Exemple :

Calculez la racine carrée de :

a. 4 :

b. 100 :

c. 0,01 :

d. 1 :

e. -4 :

Exemple :

Calculez la racine carrée de :

a. *4 :* $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$

b. *100 :* $\sqrt{100} = 10$ car $10^2 = 100$

c. *0,01 :* $\sqrt{0,01} = 0,1$ car $0,1^2 = 0,01$

d. *1 :* $\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$

e. *-4 :* $\sqrt{-4}$ n'existe pas sur $\mathbb{R}$ car la racine carrée n'est définie que pour les réels positifs

Nombres et Calcul Numérique

Propriété 3 : (racine carrée du carré)

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \text{ est positif} \\ -a \text{ si } a \text{ est négatif} \end{cases} = |a|$$

NB :
$|a|$ est la valeur absolue de a, c'est la distance à zéro de a (la valeur positive)

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Calculez :

$a.\quad \sqrt{2^2} =$

$b.\quad \sqrt{(-2)^2} =$

Démonstration :

Si $a \geq 0$:

Si $a < 0$:

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Calculez :

a. $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = |2|$

b. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2| \quad \neq -2$

Démonstration :

Si $a \geq 0$: $\sqrt{a^2} = a$ par définition de la racine carrée

Si $a < 0$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2}$ avec $-a$ positif donc $\sqrt{a^2} = -a$ par définition de la racine carrée

Nombres et Calcul Numérique

Propriété 4 : (Règles de calcul)

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad (1)$$

$$\left(a^n\right)^p = a^{n \times p} \quad (2)$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad (3)$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad (4)$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad (5)$$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (6)$$

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Calculez :

$a.\quad 2^3 \times 2^5 =$

$b.\quad \dfrac{2^3}{2^5} =$

$c.\quad \dfrac{\left(2^3 \times 10^4\right)^2}{2^{13} \times 5^9} =$

$d.\quad \sqrt{50} =$

Nombres et Calcul Numérique

Exemple :

Calculez :

$$a.\quad 2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$b.\quad \frac{2^3}{2^5} = 2^3 \times \frac{1}{2^5} = 2^3 \times 2^{-5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2^3}{2^5} = \frac{2^3 \times 1}{2^3 \times 2^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$c.\quad \frac{\left(2^3 \times 10^4\right)^2}{2^{13} \times 5^9} = \frac{2^6 \times \left(2^8 \times 5^8\right)}{2^{13} \times 5^9} = \frac{2^{6+8-13}}{5^{9-8}} = \frac{2}{5}$$

$$d.\quad \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$