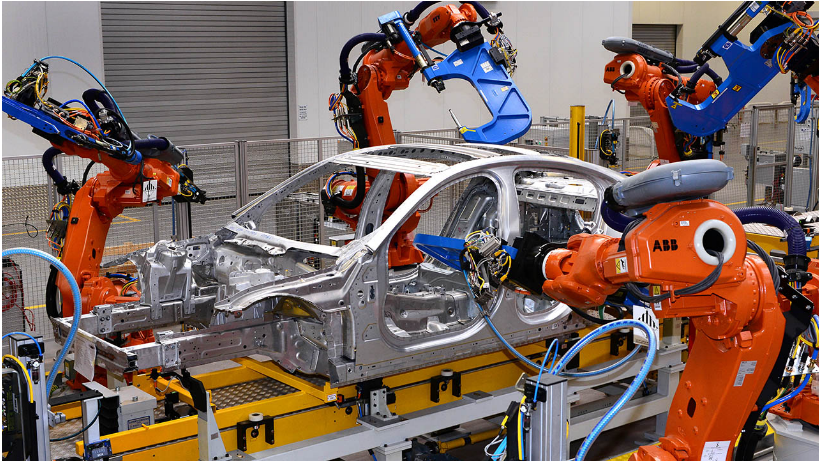
Géométrie et Repérage

MatheX

30 décembre 2020



ABB

Définition 1 : (Repère cartésien)

Soit trois points non alignés O , I et J

Le repère cartésien $(O\,;I\,,J)$ est défini par :

1. O **l'origine** du repère
2. l'axe des **abscisses** :
   - supporté par (OI) dirigé de O vers I
   - l'unité sur les abscisses est la longueur OI
3. l'axe des **ordonnées** :
   - supporté par (OJ) dirigé de O vers J
   - l'unité sur les ordonnées est la longueur OJ

Vocabulaire :

∘ si les axes sont perpendiculaires, le repère est orthogonal

∘ si en plus $OI = OJ$, le repère est orthonormé

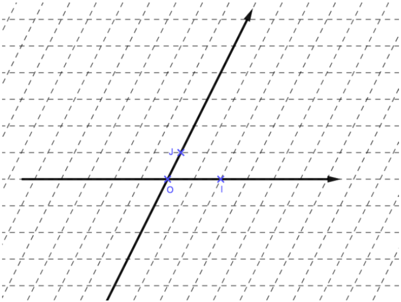
Exemple : *Représentez un repère* $(O\,;I\,,J)$ *:*

a. non orthogonal

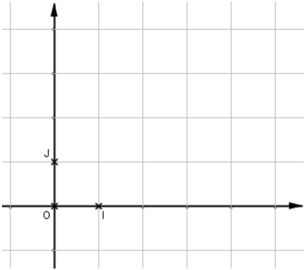
b. orthonormé

Exemple : *Représentez un repère $(O ; I, J)$:*

a. non orthogonal



b. orthonormé



Définition 2 : (Coordonnées)

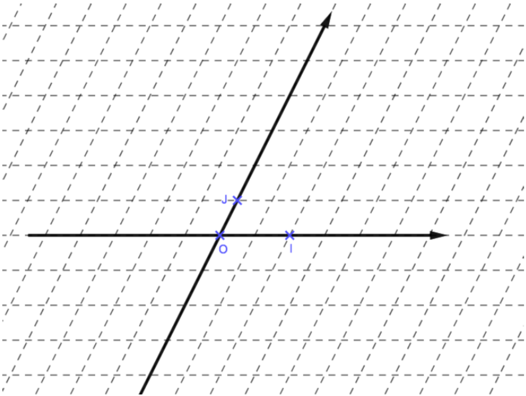
A tout point M du plan, on peut associerun **couple de nombres réels** x_M et y_M qui permettent de le repérer dans un repère cartésien :

- x_M est l'abscisse de M
- y_M est l'ordonnée de M

De manière réciproque, à tout couple de réel $(x_M\,;\,y_M)$, on peut associer avec un repère cartésien le point du plan $\boldsymbol{M(x_M\,;\,y_M)}$

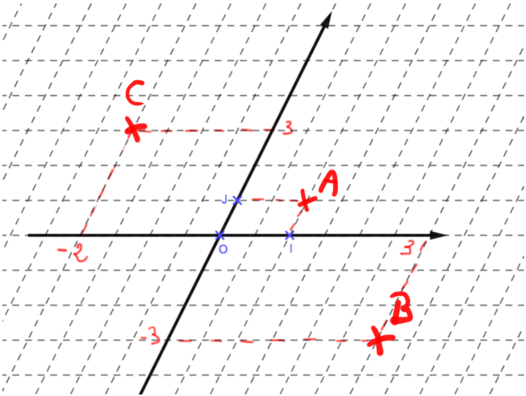
Exemple : *Placez dans le repère $(O\,;I,J)$ les points :*

a. $A(1\,;1)$ b. $B(3\,;-3)$ c. $C(-2\,;3)$



Exemple : *Placez dans le repère* $(O\,;I\,,J)$ *les points :*

a. $A(1\,;\,1)$ b. $B(3\,;\,-3)$ c. $C(-2\,;\,3)$



Définition 3 : (Coordonnées du milieu)

Soit le point $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ et le point $B\,(\,x_B\,;\,y_B\,)$

Les coordonnées du point I milieu du segment $[\,A\,;\,B\,]$) sont :

$$\boxed{I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\right)}$$

Exemple :

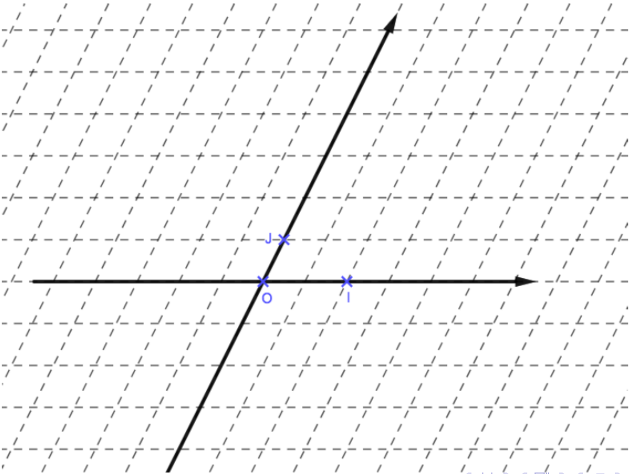
a. *Calculez les coordonnées des milieux de de tous les segments possibles avec les points :* $A\,(\,3\,;\,3\,)$ $B\,(\,3\,;\,-3\,)$ $C\,(\,-2\,;\,1\,)$

Exemple :

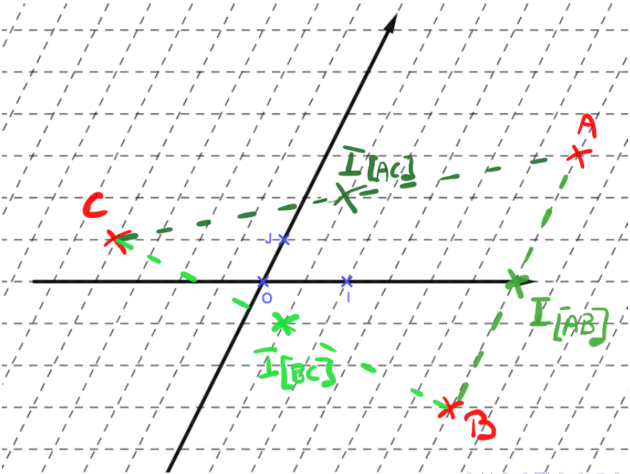
a. Calculez les coordonnées des milieux de de tous les segments possibles avec les points : $A\,(3\,;\,3)$ $B\,(3\,;\,-3)$ $C\,(-2\,;\,1)$

- milieu de $[AB]$: $I_{[AB]}\ (3\,;\,0)$
- milieu de $[AC]$: $I_{[AC]}\ \left(\dfrac{1}{2}\,;\,2\right)$
- milieu de $[BC]$: $I_{[BC]}\ \left(\dfrac{1}{2}\,;\,-1\right)$

Exemple : *b. Placez les points et les milieux sur le repère :*



Exemple : *b.* *Placez les points et les milieux sur le repère :*



Définition 4 : (Distance)

Soit le point $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ et le point $B\,(\,x_B\,;\,y_B\,)$ dans un repère **orthonormé**

La distance AB est égale à :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Exemple :

Soit les points $A\,(\,2\,;\,2\,)$ *et* $B\,(\,5\,;\,-2\,)$ *dans un repère orthonormé.*
Calculez la distance AB

Exemple :

Soit les points $A\,(\,2\,;\,2\,)$ et $B\,(\,5\,;\,-2\,)$ dans un repère orthonormé.
Calculez la distance AB

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(5-2)^2 + (-2-2)^2} \\
&= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \\
&= \sqrt{9+16} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$

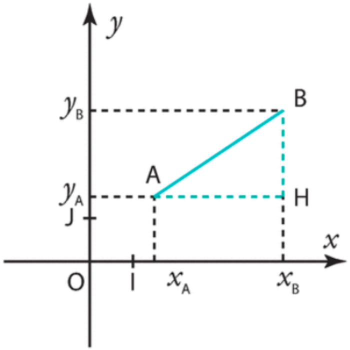
Démonstration :

D'après le théorème de pythagore dans le triangle ABH rectangle en H :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2 \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \end{aligned}$$

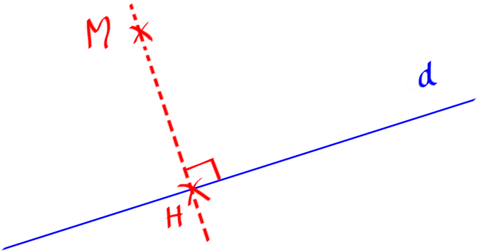
et comme $AB > 0$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \square$$



Définition 5 : (Projeté orthogonal)

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point H de d tel que $(MH) \perp d$:

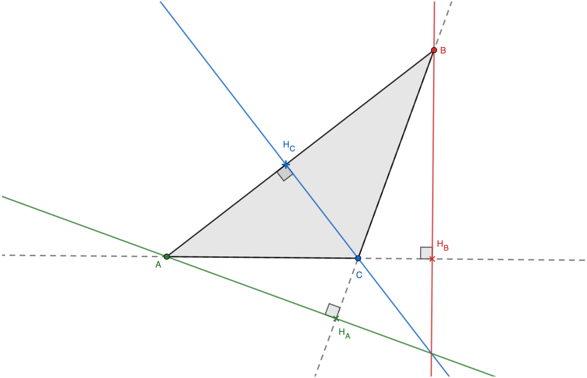


Exemple :

Tracez un triangle ABC quelconque et construire les projetés orthogonaux de A sur (BC) , B sur (AC) et C sur (AB) :

Exemple :

Tracez un triangle ABC quelconque et construire les projetés orthogonaux de A sur (BC) , B sur (AC) et C sur (AB) :

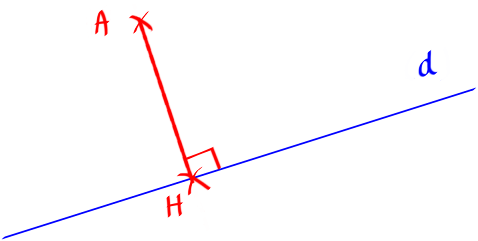


https://www.geogebra.org/geometry/aypjwzdn

Définition 6 : (Distance)

La distance entre deux points A et B est la longueur du segment $[AB]$

La distance entre un point A et une droite d est la longueur du segment $[AH]$ avec H le projeté orthogonal de A sur d

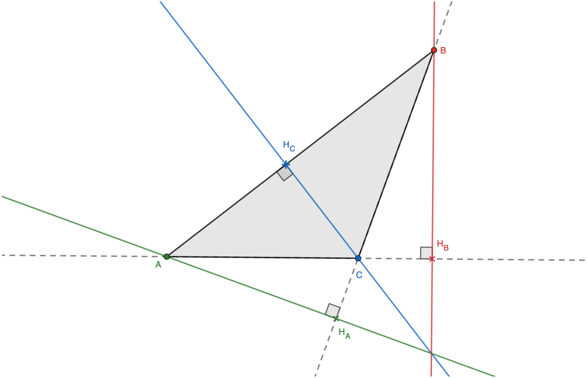


Exemple :

Tracez un triangle ABC quelconque et mesurer la distance entre A et (BC) , B et (AC) ainsi que C et (AB) :

Exemple :

Tracez un triangle ABC quelconque et mesurer la distance entre A et (BC) , B et (AC) ainsi que C et (AB) :



https://www.geogebra.org/geometry/aypjwzdn

Propriété 1 : (Distance d'un point à une droite)

Soit A un point, d une droite et H le projeté orthogonal de A sur d

Pour tout point M de d :

$$\boxed{AM \geq AH}$$

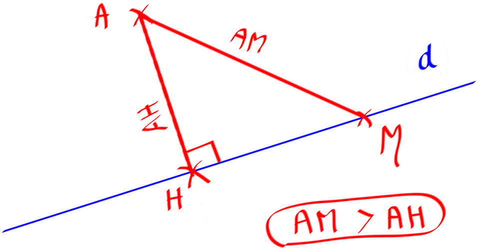
AH est donc la plus courte distance de A à un point de la droite d

Exemple :

Placez un point A, tracez une droite d, construire projeté orthogonal de A sur d, placez un point M sur d, mesurez les distances et vérifiez l'inégalité

Exemple :

Placez un point A, tracez une droite d, construire projeté orthogonal de A sur d, placez un point M sur d, mesurez les distances et vérifiez l'inégalité



Démonstration :

D'après le théorème de Pythagore, dans AHM :

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \implies AM \geq AH$$

Propriété 2 : (inégalité triangulaire)

Soit A et B deux points.

Pour tout point M du plan :

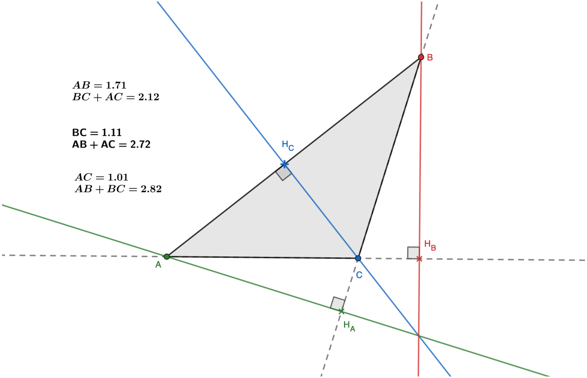
$$\boxed{AB \leq AM + MB}$$

Exemple :

Placez trois point A et B et M, mesurez les distances et vérifiez l'inégalité

Exemple :

Placez trois point A et B et M, mesurez les distances et vérifiez l'inégalité



https://www.geogebra.org/geometry/aypjwzdn

Démonstration :

D'après le théorème de Pythagore, dans AHM :

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \implies AM \geq AH$$

D'après le théorème de Pythagore, dans BHM :

$$BM^2 = BH^2 + HM^2 \implies BM \geq BH$$

Or les points A, B et H sont alignés donc :

$$AB \leq AH + HB \leq AM + MB$$