Droites et Systèmes

MatheX

3 septembre 2020

1. Equation réduite

Propriété 1 : (équation réduite d'une droite)

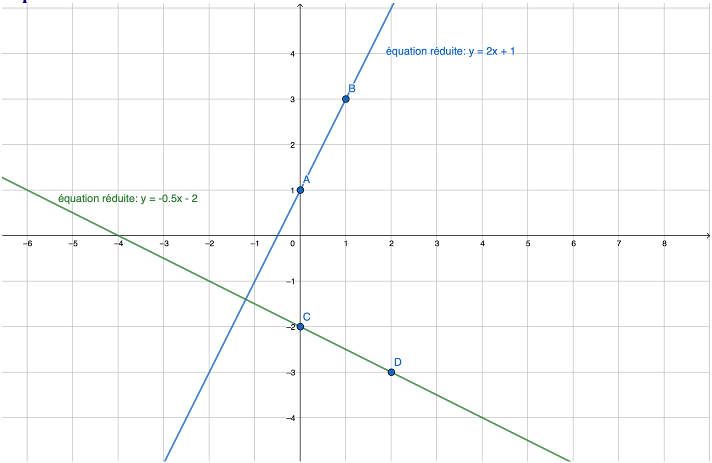
Soit un repère du plan et une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées.

Les coordonnées de tous les points $M(\,x\,;\,y\,)$ de d vérifient l'équation réduite de d qui est de la forme :

$$\boxed{y = mx + p}$$

m est le coefficient directeur de la droite (la pente)
p est l'ordonnée à l'origine

Exemple :



https://www.geogebra.org/geometry/xszgpwf2

Propriété 2 : (coefficient directeur et accroissements)

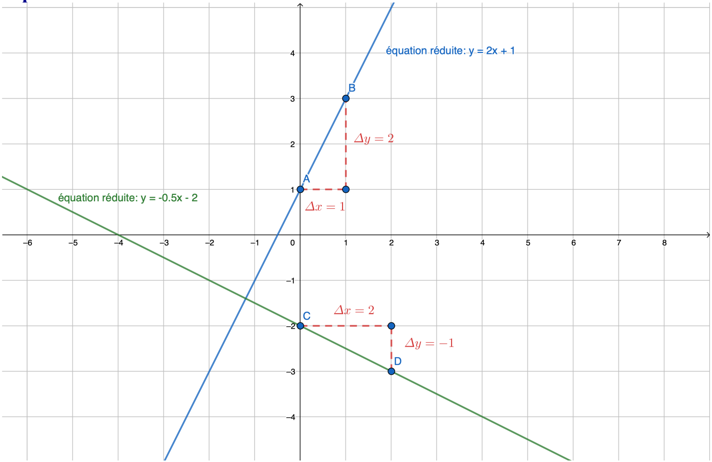
Soit une droite d d'équation réduite : $y = mx + p$
Soit deux points de d : $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$

Le coefficient directeur m est égal au rapport des accroissements en y et en x :

$$\boxed{m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

En particulier si $\Delta_x = 1$ alors $m = \Delta_y$

Exemple :



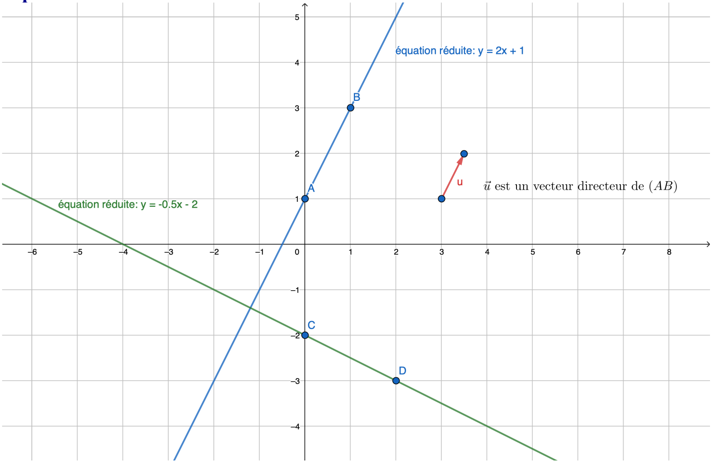
https://www.geogebra.org/geometry/euyy8r3u

Définition 1 : (vecteur directeur d'une droite)

Soit d une droite.
Soit A et B deux points de d.

On appelle vecteur directeur de la droite d tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exemple :



https://www.geogebra.org/geometry/e8keb8uh

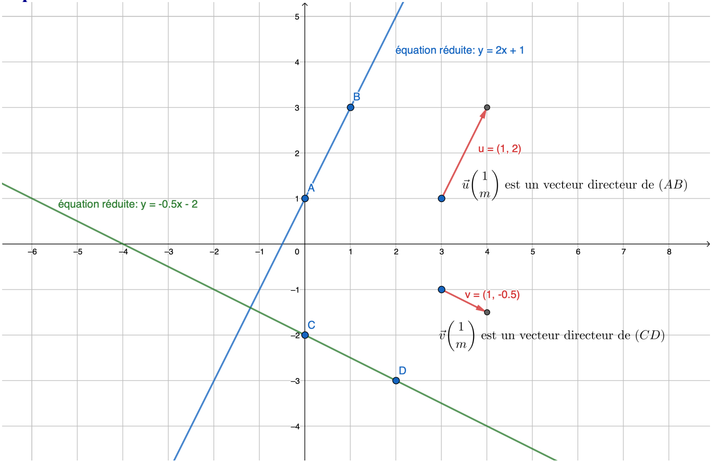
Propriété 3 : (vecteur directeur et équation réduite)

Soit une droite d d'équation réduite : $y = mx + p$

Le vecteur $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de d

NB :
les vecteurs directeurs sont tous de la forme $k.\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exemple :



https://www.geogebra.org/geometry/vbyd8pgk

Démonstration :

Soit une droite d d'équation réduite $y = mx + p$
Soit $A(\, x_A \,;\, y_A \,)$ et $B(\, x_B \,;\, y_B \,)$ deux points de d
Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$

$$det(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix}1 & x_B - x_A\\ m & y_B - y_A\end{vmatrix} \begin{array}{cl} = & 1 \times (y_B - y_A) - m \times (x_B - x_A) \\ = & y_B - y_A - mx_B + mx_A \\ = & (mx_B + p) - (mx_A + p) - mx_B + mx_A \\ = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{u}$ est un vecteur directeur de d $\square$

Propriété 4 : (positions relatives)

Soit d une droite d'équation réduite $y = mx + p$
Soit d' une droite d'équation réduite $y' = m'x + p'$

$d \;//\; d'$	$\Longleftrightarrow$	$\boxed{\text{m=m'}}$
d et d' confondues	$\Longleftrightarrow$	$m = m'$ **et** $p = p'$
d et d' sécantes	$\Longleftrightarrow$	$m \neq m'$

Exemple :

2. Equation cartésienne

Propriété 5 : (équation cartésienne)

Soit un repère du plan et une droite d du plan.

Les coordonnées de tous les points $M(\,x\,;\,y\,)$ de d vérifient les équations cartésiennes de d qui sont de de la forme :

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad \text{avec } (a; b) \neq (0; 0)$$

NB :
Les droites verticales peuvent maintenant avoir une équation.
L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique.

Exemple :

$$\begin{aligned} y = 2x + 1 &\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \qquad (a = 2; b = -1; c = 1) \\ &\Rightarrow 20x - 10y + 10 = 0 \qquad (a = 20; b = -10; c = 10) \end{aligned}$$

$$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \qquad (a = 1; b = 0; c = -2)$$

Démonstration :

Soit un point $A(\, x_A \,;\, y_A \,)$ d'une droite d

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d

$$
\begin{aligned}
M(x;y) \in d \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\
& \Leftrightarrow \quad det(\vec{u};\overrightarrow{AM}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} u_x & x - x_A \\ u_y & y - y_A \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad u_x(y - y_A) - u_y(x - x_A) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad u_y x + (-u_x)y + (u_x y_A - u_y x_A) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Propriété 6 : (vecteur directeur et équation cartésienne)

Soit une droite d d'équation : $ax + by + c = 0$

Le vecteur $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de d

NB :
les vecteurs directeurs sont tous de la forme $k.\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exemple :

$$d:\ y = 2x+1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d$$

$$\begin{aligned} d:\ y = 2x+1 &\Rightarrow d:\ 2x - y + 1 = 0 \quad (a=2; b=-1; c=1)\\ &\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d:\ x = 2 \qquad &\Rightarrow d:\ x - 2 = 0 \quad (a=1; b=0; c=-2)\\ &\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d \end{aligned}$$

Démonstration :

Soit une droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$
Soit $A(\, x_A \,;\, y_A \,)$ et $M(\, x \,;\, y \,)$ deux points de d
Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

$$det(\vec{u};\overrightarrow{AM}) = \begin{vmatrix} -b & x - x_A \\ a & y - y_A \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -b(y - y_A) - a(x - x_A) \\ &= -(ax + by) + (ax_A + by_A) \\ &= -(-c) + (-c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{u}$ est un vecteur directeur de d $\square$

Propriété 7 : (positions relatives)

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$
Soit d' une droite d'équation cartésienne $a'x + b'y + c' = 0$

$d \;//\; d' \iff$ $\boxed{\text{ab'-ba'=0}}$

d et d' confondues $\iff$ les coefficients sont deux à deux proportionnels

d et d' sécantes $\iff$ $ab' - ba' \neq 0$

Exemple :

Déterminez les positions relatives des droites d'équation :

$$\begin{aligned} 2x + y + 3 &= 0 \qquad (d_1) \\ 4x + 2y + 6 &= 0 \qquad (d_2) \\ x + 2y + 3 &= 0 \qquad (d_3) \end{aligned}$$

Pour d_1 et d_2 :
$(d_2) = 2 \times (d_1) \Longrightarrow d_1$ et d_2 confondues

Pour d_1 et d_3 :
$ab' - ba' = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Longrightarrow d_1$ et d_3 sécantes

Pour d_2 et d_3 :
$ab' - ba' = 8 - 2 = 6 \neq 0 \Longrightarrow d_2$ et d_3 sécantes

3. Système d'équations

Définition 2 : (Système d'équations)

Un système d'équations est un ensemble d'équations.

Résoudre un système, c'est trouver les valeurs des inconnues qui vérifient **simultanément** toutes les équations du système.

Un système **linéaire** de deux équations à deux inconnus est un système de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} a\,x + b\,y + c \;= 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}}$$

avec a, b, c, a', b', c' des constantes réelles

avec $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$

Exemple :

Vous achetez (une pomme et une banane à 10 dh) **et** (deux pommes et une banane à 14 dh).

Soit x le prix d'une pomme et y le prix d'une banane, on obtient le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ 2x + y = 14 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ 2x + y - 14 = 0 \end{cases}$$

- $x = 1$ et $y = 9$ est solution de (1) mais **pas** de (2)
  $\Longrightarrow (1; 9)$ n'est pas solution du système
- $x = 4$ et $y = 6$ est solution de (1) **et** de (2)
  $\Longrightarrow (4; 6)$ est solution du système

Propriété 8 : (système et droites)

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$
Soit d' une droite d'équation cartésienne $a'x + b'y + c' = 0$
Soit $M(x; y)$ un point du plan.

Soit le système : $(S)\ \begin{cases} a\,x + b\,y + c\ = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

$(x; y)$ est solution de (S) $\Longleftrightarrow$ M est un point d'intersection de d **et** d'

Exemple :

Soit d une droite d'équation cartésienne $x + y - 10 = 0$
Soit d' une droite d'équation cartésienne $2x + y - 14 = 0$
Soit le système : $(S)\left\{\begin{array}{r} x + y - 10 = 0 \\ 2x + y - 14 = 0 \end{array}\right.$

Alors :
le point $A(4; 6)$ un point d'intersection entre d et d'
et
$(4; 6)$ est solution de (S)

Propriété 9 : (Nombre de solutions d'un système)

Soit le système : $(S)\ \begin{cases} a\,x + b\,y + c\ = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

avec $(a;b) \neq (0;0)$ et $(a';b') \neq (0;0)$

Soit P la proposition les coefficients de (S) sont deux à deux proportionnels

(S) a une unique solution $\Leftrightarrow$ $\boxed{ab' - ba' \neq 0}$

(S) n'a aucune solution $\Leftrightarrow$ $ab' - ba' = 0$ **et** $\overline{P}$

(S) a une infinité de solutions $\Leftrightarrow$ $ab' - ba' = 0$ **et** P

Exemple :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{r} x+y-10=0 \\ 2x+y-14=0 \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow ab'-ba'=1-2\neq 0 \Longrightarrow (S)$ a une unique solution

Méthode 1 : (Substitution)

Soit le système : $(S)\ \begin{cases} a\,x + b\,y + c\ = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$

Pour résoudre ce système, on peut :

1. Exprimer une variable en fonction de l'autre à l'aide d'une équation
2. Substituer cette expression à la variable dans l'autre équation
3. Résoudre l'équation à une inconnue résultante
4. Retrouver l'autre inconnue avec l'expression trouvée en première étape

Exemple :

$$\begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ 2x + y - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 10 - x \\ 2x + y - 14 = 0 \end{cases} \qquad \text{(étape 1)}$$

$$\iff \begin{cases} y = 10 - x \\ 2x + 10 - x - 14 = 0 \end{cases} \qquad \text{(étape 2)}$$

$$\iff \begin{cases} y = 10 - x \\ x = 4 \end{cases} \qquad \text{(étape 3)}$$

$$\iff \begin{cases} y = 6 \\ x = 4 \end{cases} \qquad \text{(étape 4)}$$

Méthode 2 : (Combinaison)

Soit le système : $(S)\ \begin{cases} a\,x + b\,y + c\ = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$

Pour résoudre ce système, on peut :

1. Multiplier une équation pour avoir le même coefficient que l'autre équation pour une variable
2. Soustraire membre à membre les deux équations
3. Résoudre l'équation à une inconnue résultante
4. Retrouver l'autre inconnue avec l'équation de départ

Exemple :

$$\begin{cases} x + y - 10 = 0 & (1) \\ 2x + y - 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 20 = 0 & (3) \leftarrow 2 \times (1) \\ 2x + y - 14 = 0 & (2) \end{cases} \qquad \text{(étape 1)}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 20 = 0 & (3) \\ y - 6 = 0 & (4) \leftarrow (3) - (2) \end{cases} \qquad \text{(étape 2)}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 20 = 0 & (3) \\ y = 6 \end{cases} \qquad \text{(étape 3)}$$

$$\iff \begin{cases} x = 10 - 6 = 4 \\ y = 6 \end{cases} \qquad \text{(étape 4)}$$