Second Degré

MatheX

25 septembre 2022

Second Degré

Table des matières :

Second Degré

Table des matières :

Second Degré

Définition 1 : (fonction polynôme du second degré)

Une fonction polynôme du second degré , ou trinôme du second degré, est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

avec les coefficients a, b, c des réels et $a \neq 0$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & ax^2 + bx + c \end{array}$$

Second Degré

Exemple : *Vérifiez si les fonctions ci-dessous sont des fonctions du second degré et, le cas échéant, identifiez ses coefficients (a, b, c) :*

a. $f(x) = x^2 + x + 1$

b. $f(x) = 3 - x^2 + 6x$

c. $f(x) = -2x + 1$

d. $f(x) = x.(2x + 1)$

e. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

Second Degré

Exemple : *Vérifiez si les fonctions ci-dessous sont des fonctions du second degré et, le cas échéant, identifiez ses coefficients (a, b, c) :*

a. $f(x) = x^2 + x + 1$

OUI : $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$

b. $f(x) = 3 - x^2 + 6x$

OUI : $a = -1$; $b = 6$; $c = 3$

c. $f(x) = -2x + 1$

NON : $a = 0$

d. $f(x) = x.(2x + 1)$

OUI : $a = 2$; $b = 1$; $c = 0$

e. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

NON : x^3

Second Degré

Théorème 1 : (forme canonique)

Toute fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

avec $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$

et $\boxed{\beta = f(\alpha)}$

Second Degré

Démonstration :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \qquad (1)$$

On sait que : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

et donc que : $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad (2)$

$$\begin{aligned}
(1) \text{ et } (2) \quad \Rightarrow \quad f(x) &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) \\
&= a\,(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha) \qquad \square
\end{aligned}$$

Second Degré

Exemple :

Mettre sous forme canonique :

a. $f(x) = x^2 + x + 1$

b. $f(x) = 3 - x^2 + 6x$

Second Degré

Exemple :

Mettre sous forme canonique :

a. $f(x) = x^2 + x + 1$

$$a = 1\,;\, b = 1\,;\, c = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2}\,;\, \beta = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{3}{4}$$

b. $f(x) = 3 - x^2 + 6x$

$$a = -1\,;\, b = 6\,;\, c = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3\,;\, \beta = 12$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -(x-3)^2 + 12$$

Propriété 1 : (courbe représentative)

Soit f une fonction du second degré : $f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$
Soit C_f sa courbe représentative

C_f est une parabole de sommet le point S de coordonnées :

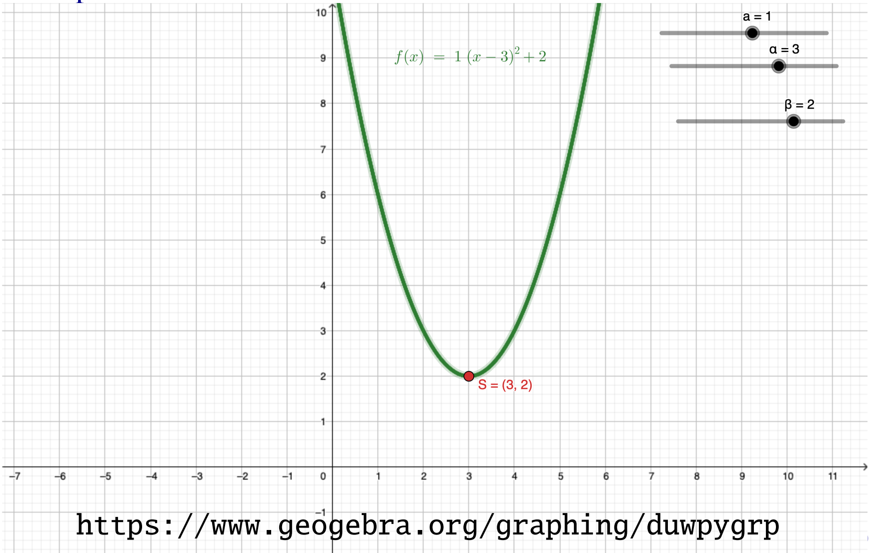
$$\boxed{S\,(\,\alpha\,;\,\beta\,)}$$

C_f est symétrique par rapport à la droite d'équation :

$$\boxed{x = \alpha}$$

Second Degré

Exemple :



https://www.geogebra.org/graphing/duwpygrp

Second Degré

Démonstration : $S(\,\alpha\,;\,\beta\,)$ est <u>le</u> sommet de la parabole

<u>$a > 0$:</u>

$$(x-\alpha)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a\,(x-\alpha)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a\,(x-\alpha)^2 + \beta = f(x) \geq \beta \quad (1)$$

$$f(x) = \beta \;\Leftrightarrow\; x = \alpha \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ $S(\,\alpha\,;\,\beta\,)$ est <u>le</u> sommet de la parabole

<u>$a < 0$:</u>

$$(x-\alpha)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a\,(x-\alpha)^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; a\,(x-\alpha)^2 + \beta = f(x) \leq \beta \quad (1)$$

$$f(x) = \beta \;\Leftrightarrow\; x = \alpha \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ $S(\,\alpha\,;\,\beta\,)$ est <u>le</u> sommet de la parabole

Second Degré

Démonstration : C_f est symétrique par rapport à la droite $x = \alpha$

Soit h un réel, on va comparer $f(\alpha + h)$ et $f(\alpha - h)$:

$$f(\alpha + h) = a\,((\alpha + h) - \alpha)^2 + \beta = a\,h^2 + \beta \quad (1)$$

$$f(\alpha - h) = a\,((\alpha - h) - \alpha)^2 + \beta = a\,(-h)^2 + \beta = a\,h^2 + \beta \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow f(\alpha + h) = f(\alpha - h) \Rightarrow$ C_f est symétrique par rapport à la droite $x = \alpha$

Second Degré

Propriété 2 : (sens de variation)

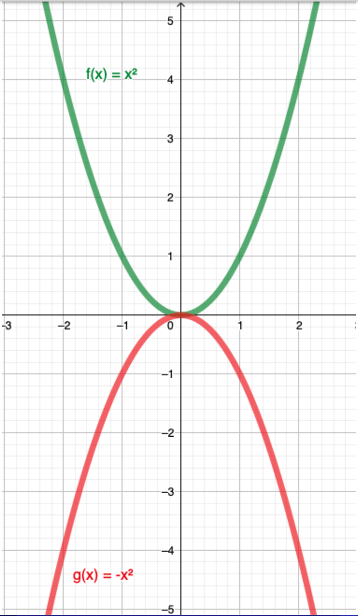
Selon le signe de a, le sens de variation d'une fonction du second degré est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f $(a > 0)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f $(a < 0)$	-∞	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Second Degré

Exemple :



Second Degré

Démonstration :

i. $a > 0$:

$$\alpha \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha \Rightarrow (x_1-\alpha)^2 \leq (x_2-\alpha)(x_1-\alpha) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) \leq (x_2-\alpha)^2 \qquad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow (x_1-\alpha)^2 \leq (x_2-\alpha)^2 \Rightarrow a\,(x_1-\alpha)^2 \leq a\,(x_2-\alpha)^2$$

$$\Rightarrow a\,(x_1-\alpha)^2+\beta \leq a\,(x_2-\alpha)^2+\beta \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$\Rightarrow f$ croissante sur $[\,\alpha\,;\,+\infty\,[$

$$x_1 \leq x_2 \leq \alpha \Rightarrow x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha \leq 0 \Rightarrow (x_1-\alpha)^2 \geq (x_2-\alpha)(x_1-\alpha) \qquad (3)$$

$$\Rightarrow (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) \geq (x_2-\alpha)^2 \qquad (4)$$

$$(3)+(4) \Rightarrow (x_1-\alpha)^2 \geq (x_2-\alpha)^2 \Rightarrow a\,(x_1-\alpha)^2 \geq a\,(x_2-\alpha)^2$$

$$\Rightarrow a\,(x_1-\alpha)^2+\beta \geq a\,(x_2-\alpha)^2+\beta \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$\Rightarrow f$ décroissante sur $]\,-\infty\,;\,\alpha\,]$

Second Degré

Démonstration :

ii. $a < 0$:

$$\alpha \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha \Rightarrow (x_1-\alpha)^2 \leq (x_2-\alpha)(x_1-\alpha) \quad (1)$$
$$\Rightarrow (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) \leq (x_2-\alpha)^2 \quad (2)$$
$$(1)+(2) \Rightarrow (x_1-\alpha)^2 \leq (x_2-\alpha)^2 \Rightarrow a\,(x_1-\alpha)^2 \geq a\,(x_2-\alpha)^2$$
$$\Rightarrow a\,(x_1-\alpha)^2+\beta \geq a\,(x_2-\alpha)^2+\beta \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$\Rightarrow f$ décroissante sur $[\,\alpha\,;\,+\infty\,[$

$$x_1 \leq x_2 \leq \alpha \Rightarrow x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha \leq 0 \Rightarrow (x_1-\alpha)^2 \geq (x_2-\alpha)(x_1-\alpha) \quad (3)$$
$$\Rightarrow (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) \geq (x_2-\alpha)^2 \quad (4)$$
$$(3)+(4) \Rightarrow (x_1-\alpha)^2 \geq (x_2-\alpha)^2 \Rightarrow a\,(x_1-\alpha)^2 \leq a\,(x_2-\alpha)^2$$
$$\Rightarrow a\,(x_1-\alpha)^2+\beta \leq a\,(x_2-\alpha)^2+\beta \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$\Rightarrow f$ croissante sur $]\,-\infty\,;\,\alpha\,]$

Second Degré

Table des matières :

Second Degré

Définition 2 : (équation du second degré)

Une équation du second degré est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

avec les coefficients a, b, c des réels
et $a \neq 0$

Second Degré

Exemple : *Vérifiez si les équations ci-dessous sont des équations du second degré et essayer de les résoudre le cas échéant :*

Second Degré

Exemple : *Vérifiez si les équations ci-dessous sont des équations du second degré et essayer de les résoudre le cas échéant :*

a.	$x^2 + 2x + 1 = 0$	Oui	$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$
b.	$x^2 + 1 = 0$	Oui	$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \Rightarrow S = \emptyset$
c.	$x \cdot (x^2 + 1) = 0$	Non	car $x.x^2 = x^3$
d.	$x^2 + x + 1 = 0$	Oui	pas d'identité remarquable ...

... mais on peut utiliser la forme canonique :

$$x^2 + x + 1 = \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

Second Degré

Théorème 2 : (racines et factorisation)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ et son discriminant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Les racines (solution de $f(x) = 0$) et la factorisation de f sont :

	Racines	Factorisation
$\Delta > 0$	$\boxed{x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$	$\boxed{a(x-x_1)(x-x_2)}$
$\Delta = 0$	$\boxed{x_0 = -\dfrac{b}{2a}}$	$\boxed{a(x-x_0)^2}$
$\Delta < 0$	pas de racine dans $\mathbb{R}$	pas de factorisation dans $\mathbb{R}$

Second Degré

Démonstration :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\,(x-\alpha)^2 + \beta = a\,(x-\alpha)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$
$$= a\left((x-\alpha)^2 - \frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right) = a\left((x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right)$$

$$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = a\,(x-\alpha)^2 \;\Rightarrow\; f(x) = 0 \;\text{ pour } x = \alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta > 0 \;\Rightarrow\; f(x) = a\left((x-\alpha) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,|a|}\right)\left((x-\alpha) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,|a|}\right)$$
$$= a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}\right) = a\,(x-x_1)(x-x_2)$$
$$\Rightarrow\; f(x) = 0 \;\text{ pour } x = x_1 \text{ ou } x = x_2$$

$$\Delta < 0 \;\Rightarrow\; -\frac{\Delta}{(2a)^2} > 0 \;\Rightarrow\; \left((x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right) > 0 \;\Rightarrow\; f \text{ n'a pas de racine}$$
$$\Rightarrow\; f \text{ non factorisable}$$

Second Degré

Exemple :

Résoudre :

Factoriser :

Second Degré

Exemple :

Résoudre :

a. $x^2 + x + 1 = 0$ $\Delta = -3 < 0 \Rightarrow S = \emptyset$

b. $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\Delta = 1 > 0 \Rightarrow S = \{2; 1\}$

Factoriser :

c. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
$\Delta = 1 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)$

d. $f(x) = -3x^2 - 3x + 6$
$\Delta = 81 = 9^2 \Rightarrow f(x) = -3(x-1)(x+2)$
$f(x) = -3(x^2 + x - 2) \Rightarrow \Delta = 3^2 \Rightarrow f(x) = -3(x-1)(x+2)$

Second Degré

Table des matières :

Second Degré

Propriété 3 : (signe)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant.

Le signe de f est :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$
$\Delta = 0$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & - & \end{array}$
$\Delta < 0$	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & \end{array}$

Second Degré

Exemple :

Résoudre :

a. $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

b. $-3x^2 - 3x + 6 < 0$

Second Degré

Exemple :

Résoudre :

a. $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

$\Delta = 1 > 0$ et $a = 1 > 0 \Rightarrow S = [\,1\,;\,2\,]$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. $-3x^2 - 3x + 6 < 0$

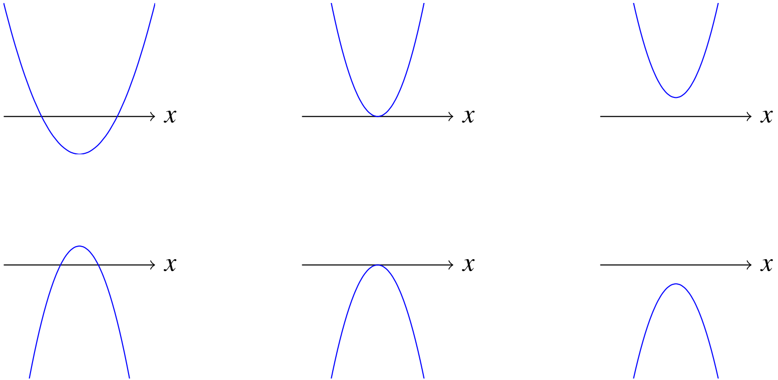
$\Delta = 81 > 0$ et $a = -3 < 0 \Rightarrow S =]-\infty\,;\,-2\,[\, \cup\,]\,1\,;\,+\infty\,[$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-3x^2 - 3x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Second Degré

Exemple 2 :

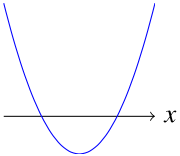
Identifiez les valeurs de a et Δ :



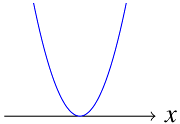
Second Degré

Exemple 2 :

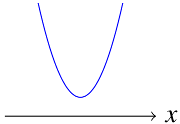
Identifiez les valeurs de a et Δ :



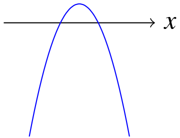
$a > 0$ et $\Delta > 0$



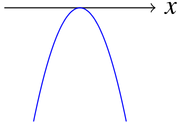
$a > 0$ et $\Delta = 0$



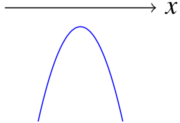
$a > 0$ et $\Delta < 0$



$a < 0$ et $\Delta > 0$



$a < 0$ et $\Delta = 0$



$a < 0$ et $\Delta < 0$