

Probabilité Conditionnelle

MatheX

12 mai 2020



1. Introduction

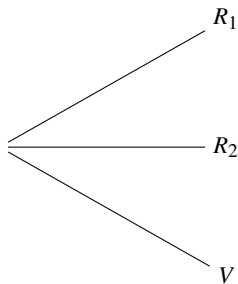
1er arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R_1 et R_2) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et avec remise , deux boules"

1er arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R_1 et R_2) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et avec remise , deux boules"

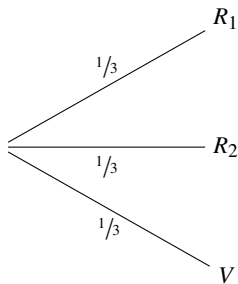
1er tirage



1er arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R_1 et R_2) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et avec remise , deux boules"

1er tirage

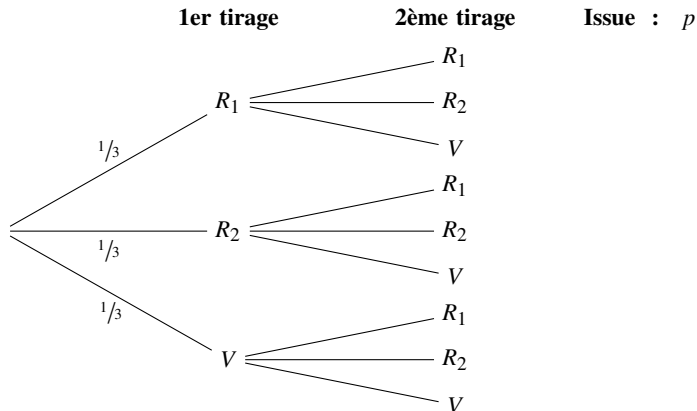


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration avec remise - Arbre non pondéré

1er arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R_1 et R_2) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **avec remise** , deux boules"

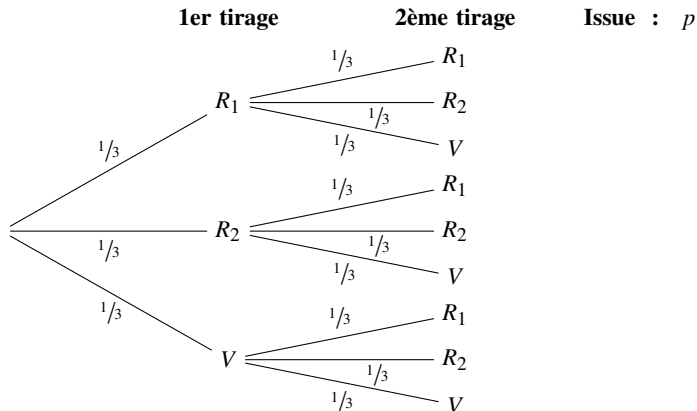


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration avec remise - Arbre non pondéré

1er arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R_1 et R_2) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **avec remise**, deux boules"

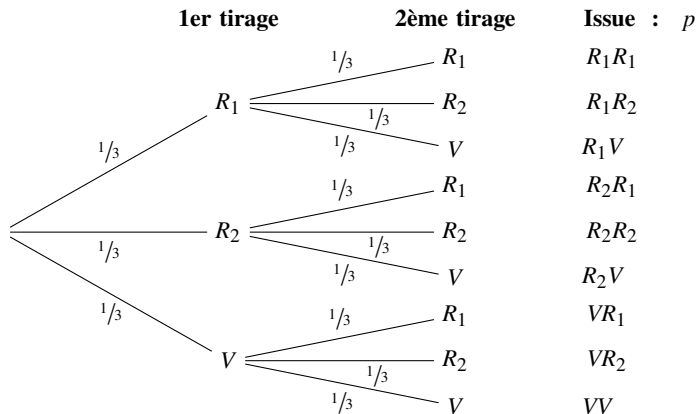


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration avec remise - Arbre non pondéré

1er arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R_1 et R_2) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **avec remise**, deux boules"

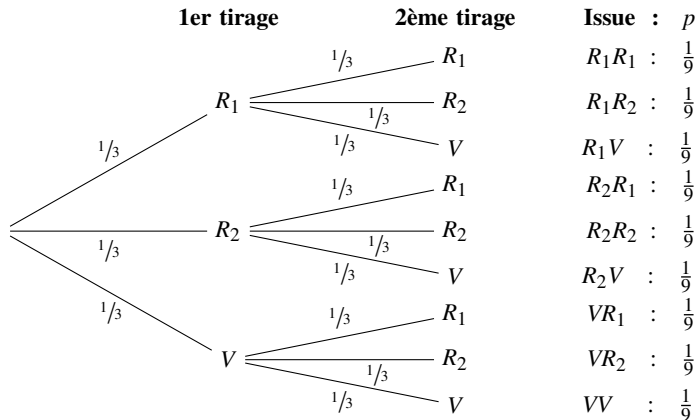


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration avec remise - Arbre non pondéré

1er arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R_1 et R_2) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **avec remise**, deux boules"



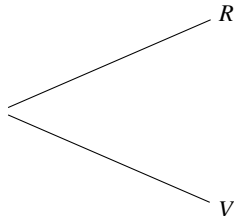
2ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et avec remise , deux boules"

2ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **avec remise** , deux boules"

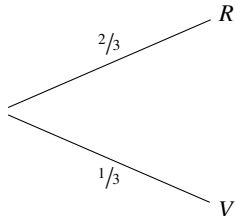
1er tirage



2ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et avec remise , deux boules"

1er tirage

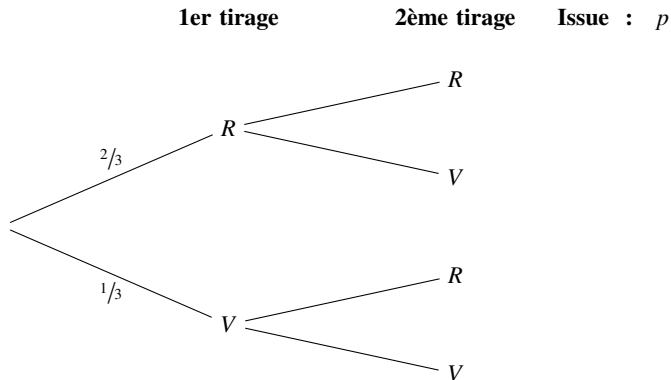


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration avec remise - Arbre pondéré

2ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **avec remise**, deux boules"

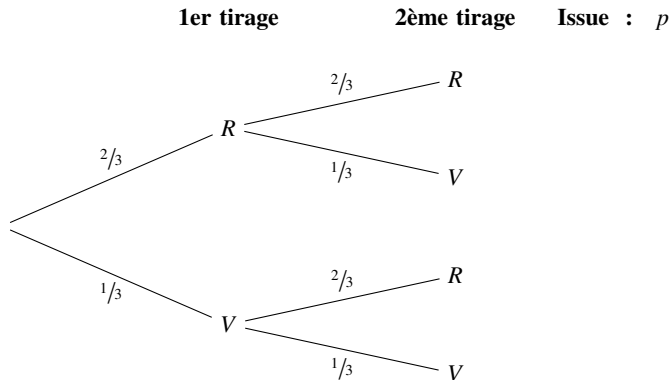


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration avec remise - Arbre pondéré

2ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **avec remise** , deux boules"

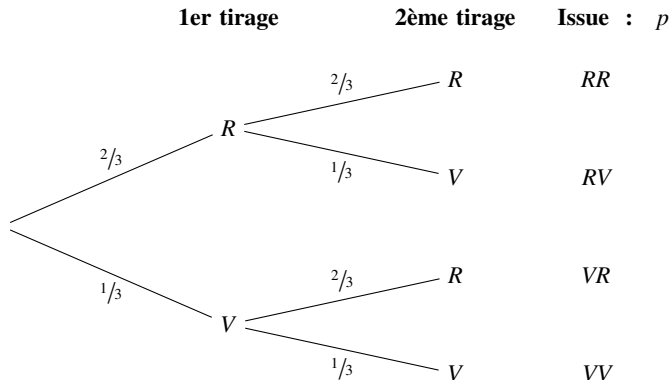


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration avec remise - Arbre pondéré

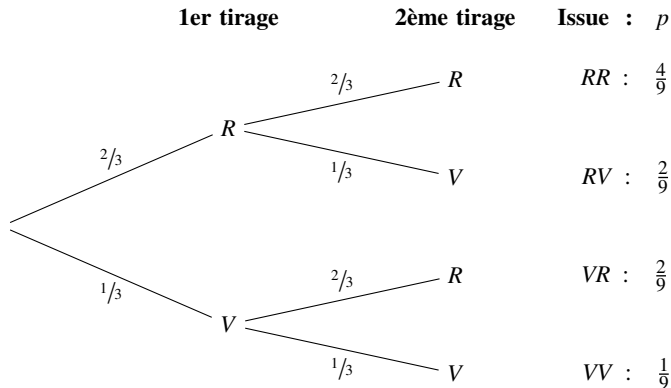
2ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **avec remise**, deux boules"



2ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **avec remise**, deux boules"



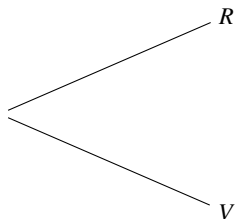
3ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **sans remise**, deux boules"

3ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **sans remise**, deux boules"

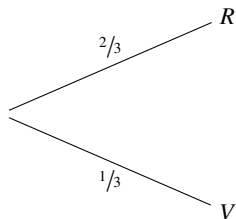
1er tirage



3ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **sans remise** , deux boules"

1er tirage

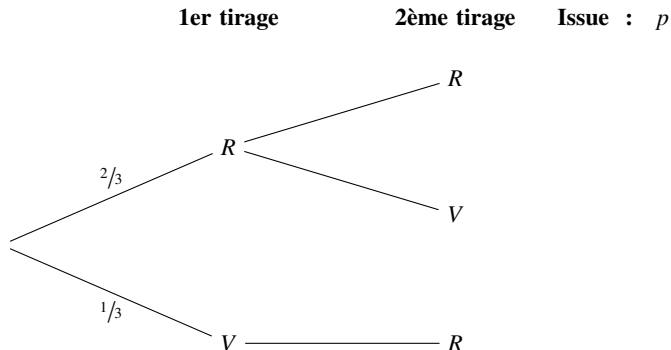


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration sans remise - Arbre pondéré

3ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **sans remise**, deux boules"

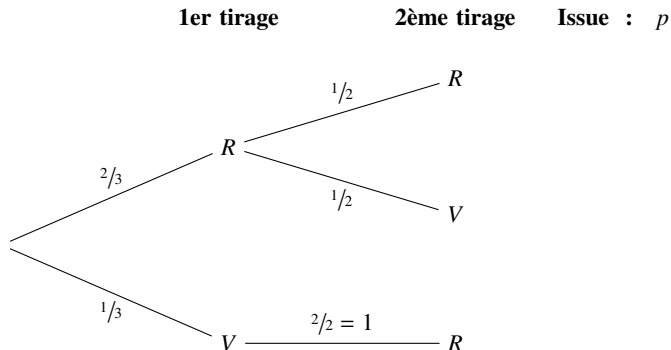


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration sans remise - Arbre pondéré

3ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **sans remise**, deux boules"

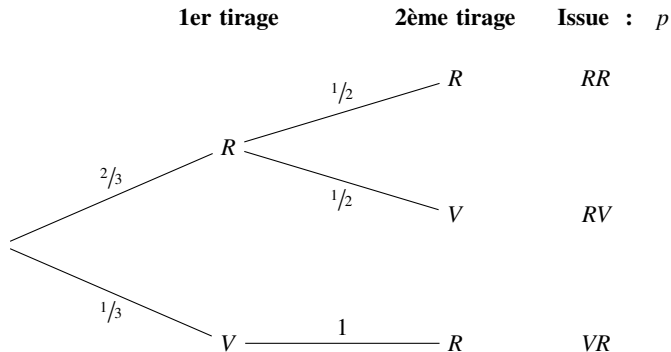


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration sans remise - Arbre pondéré

3ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **sans remise**, deux boules"

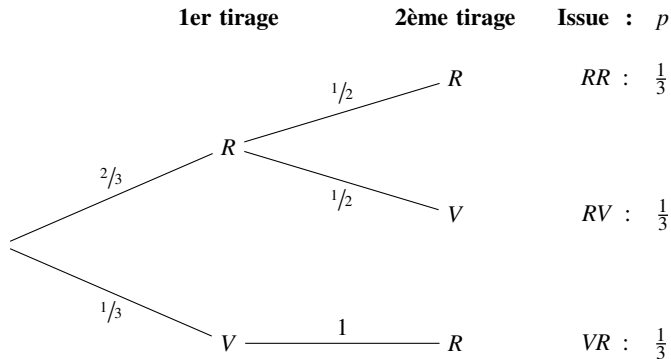


Probabilité Conditionnelle

Introduction - Configuration sans remise - Arbre pondéré

3ème arbre. On a 3 boules : 2 rouges (R) et 1 verte (V)

E : "choisir, successivement et **sans remise**, deux boules"



2. Probabilité Conditionnelle

Définition 1 : (probabilité conditionnelle)

Soit A et B deux évènements, avec $P(A) \neq 0$

Définition 1 : (probabilité conditionnelle)

Soit A et B deux évènements, avec $P(A) \neq 0$

La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est :

$$P_A(B) =$$

Définition 1 : (probabilité conditionnelle)

Soit A et B deux évènements, avec $P(A) \neq 0$

La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Définition 1 : (probabilité conditionnelle)

Soit A et B deux évènements, avec $P(A) \neq 0$

La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

NB :

- On dit : "probabilité de B sachant A "
- On peut aussi noter : $P(B/A)$
- Ne pas confondre : $P_A(B)$ et $P_B(A)$

Exemple :

Une urne contient 6 boules rouges (R) et 4 boules vertes (V)

E : "choisir, successivement et sans remise, deux boules"

R_1 : "Rouge au 1^{er} tirage" R_2 : "Rouge au 2^{ème} tirage"

V_1 : "Vert au 1^{er} tirage" V_2 : "Vert au 2^{ème} tirage"

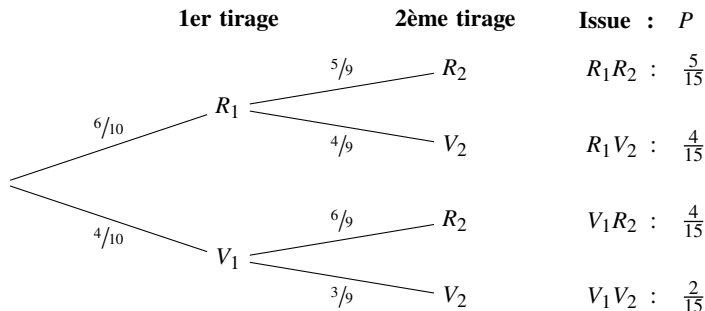
Exemple :

Une urne contient 6 boules rouges (R) et 4 boules vertes (V)

E : "choisir, successivement et sans remise, deux boules"

R_1 : "Rouge au 1^{er} tirage" R_2 : "Rouge au 2^{ème} tirage"

V_1 : "Vert au 1^{er} tirage" V_2 : "Vert au 2^{ème} tirage"



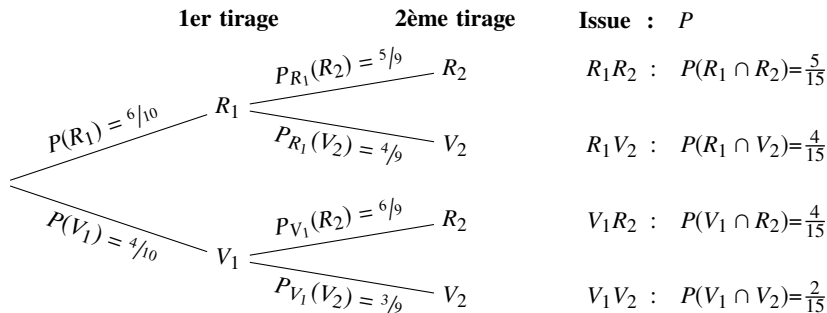
Exemple :

Une urne contient 6 boules rouges (R) et 4 boules vertes (V)

E : "choisir, successivement et sans remise, deux boules"

R_1 : "Rouge au 1^{er} tirage" R_2 : "Rouge au 2^{ème} tirage"

V_1 : "Vert au 1^{er} tirage" V_2 : "Vert au 2^{ème} tirage"



Exemple 2 : Je sais que parmi les 30 élèves de la classe, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

Exemple 2 : Je sais que parmi les 30 élèves de la classe, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

Probabilité Conditionnelle

Probabilité Conditionnelle - Définition

Exemple 2 : Je sais que parmi les 30 élèves de la classe, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

| | F | \bar{F} | Total |
|-----------|----------------------|----------------------------|--|
| M | 14 : $M \cap F$ | 12 : $M \cap \bar{F}$ | 26 : M |
| \bar{M} | 2 : $\bar{M} \cap F$ | 2 : $\bar{M} \cap \bar{F}$ | 4 : \bar{M} |
| Total | 16 : F | 14 : \bar{F} | 30 : $F \cup \bar{F} = M \cup \bar{M}$ |

Probabilité Conditionnelle

Probabilité Conditionnelle - Définition

Exemple 2 : Je sais que parmi les 30 élèves de la classe, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

| | F | \bar{F} | Total |
|-----------|----------------------|----------------------------|--|
| M | 14 : $M \cap F$ | 12 : $M \cap \bar{F}$ | 26 : M |
| \bar{M} | 2 : $\bar{M} \cap F$ | 2 : $\bar{M} \cap \bar{F}$ | 4 : \bar{M} |
| Total | 16 : F | 14 : \bar{F} | 30 : $F \cup \bar{F} = M \cup \bar{M}$ |

$$P_F(M) = \frac{14}{16}$$

Probabilité Conditionnelle

Probabilité Conditionnelle - Définition

Exemple 2 : Je sais que parmi les 30 élèves de la classe, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

| | F | \bar{F} | Total |
|-----------|----------------------|----------------------------|--|
| M | 14 : $M \cap F$ | 12 : $M \cap \bar{F}$ | 26 : M |
| \bar{M} | 2 : $\bar{M} \cap F$ | 2 : $\bar{M} \cap \bar{F}$ | 4 : \bar{M} |
| Total | 16 : F | 14 : \bar{F} | 30 : $F \cup \bar{F} = M \cup \bar{M}$ |

$$P_F(M) = \frac{14}{16}$$

$$\frac{P(F \cap M)}{P(F)} = \frac{\frac{14}{30}}{\frac{16}{30}} = \frac{14}{16}$$

Probabilité Conditionnelle

Probabilité Conditionnelle - Définition

Exemple 2 : Je sais que parmi les 30 élèves de la classe, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

| | F | \bar{F} | Total |
|-----------|----------------------|----------------------------|--|
| M | 14 : $M \cap F$ | 12 : $M \cap \bar{F}$ | 26 : M |
| \bar{M} | 2 : $\bar{M} \cap F$ | 2 : $\bar{M} \cap \bar{F}$ | 4 : \bar{M} |
| Total | 16 : F | 14 : \bar{F} | 30 : $F \cup \bar{F} = M \cup \bar{M}$ |

$$P_F(M) = \frac{14}{16}$$

$$P_M(F) = \frac{14}{26}$$

$$\frac{P(F \cap M)}{P(F)} = \frac{\frac{14}{30}}{\frac{16}{30}} = \frac{14}{16}$$

Probabilité Conditionnelle

Probabilité Conditionnelle - Définition

Exemple 2 : Je sais que parmi les 30 élèves de la classe, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

| | F | \bar{F} | Total |
|-----------|----------------------|----------------------------|--|
| M | 14 : $M \cap F$ | 12 : $M \cap \bar{F}$ | 26 : M |
| \bar{M} | 2 : $\bar{M} \cap F$ | 2 : $\bar{M} \cap \bar{F}$ | 4 : \bar{M} |
| Total | 16 : F | 14 : \bar{F} | 30 : $F \cup \bar{F} = M \cup \bar{M}$ |

$$P_F(M) = \frac{14}{16}$$

$$P_M(F) = \frac{14}{26}$$

$$\frac{P(F \cap M)}{P(F)} = \frac{\frac{14}{30}}{\frac{16}{30}} = \frac{14}{16}$$

$$\frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{14}{30}}{\frac{26}{30}} = \frac{14}{26}$$

3. Indépendance

Définition 2 : (indépendance d'évènements)

Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire.

Ces deux évènements sont **indépendants** si la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre.

On dit que A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemple :

Propriété 1 : (indépendance d'évènements)

Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles.

Propriété 1 : (indépendance d'évènements)

Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles.

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff P_A(B) = P(B) \quad (1)$$

Propriété 1 : (indépendance d'évènements)

Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles.

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} &\iff P_A(B) = P(B) \\ &\iff P_B(A) = P(A) \end{aligned} \tag{1}$$

Propriété 1 : (indépendance d'évènements)

Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles.

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff P_A(B) = P(B) \quad (1)$$

$$\iff P_B(A) = P(A)$$

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff \bar{A} \text{ et } B \text{ indépendants} \quad (2)$$

Propriété 1 : (indépendance d'évènements)

Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles.

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff P_A(B) = P(B) \quad (1)$$

$$\iff P_B(A) = P(A)$$

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff \bar{A} \text{ et } B \text{ indépendants} \quad (2)$$

$$\iff A \text{ et } \bar{B} \text{ indépendants}$$

$$\iff \bar{A} \text{ et } \bar{B} \text{ indépendants}$$

Exemple :

Une urne contient 6 boules rouges (R) et 4 boules vertes (\bar{R})

E : "choisir, successivement et sans remise, deux boules"

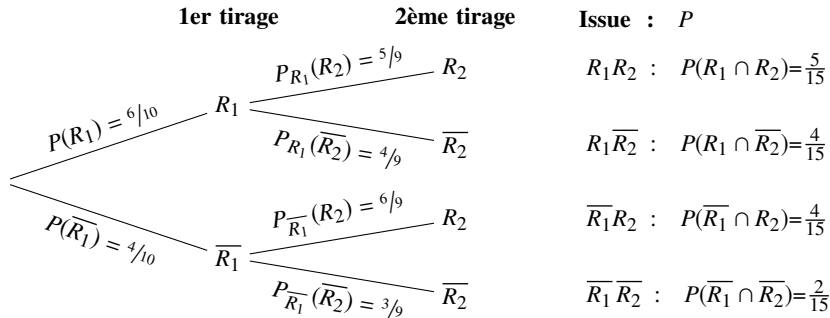
R_1 : "Rouge au 1^{er} tirage" R_2 : "Rouge au 2^{ème} tirage"

Exemple :

Une urne contient 6 boules rouges (R) et 4 boules vertes (\bar{R})

E : "choisir, successivement et sans remise, deux boules"

R_1 : "Rouge au 1^{er} tirage" R_2 : "Rouge au 2^{ème} tirage"



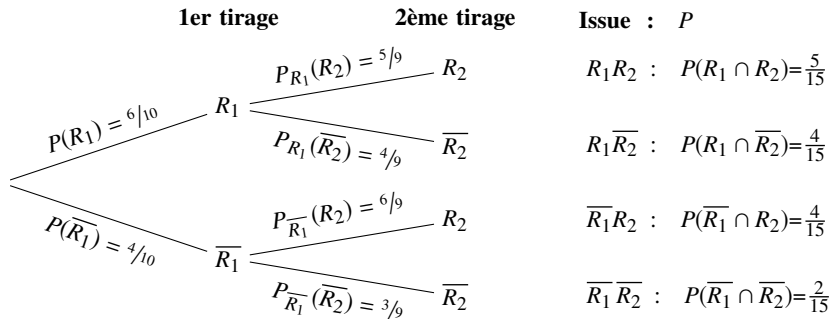
$P(R_2) =$

Exemple :

Une urne contient 6 boules rouges (R) et 4 boules vertes (\bar{R})

E : "choisir, successivement et sans remise, deux boules"

R_1 : "Rouge au 1^{er} tirage" R_2 : "Rouge au 2^{ème} tirage"



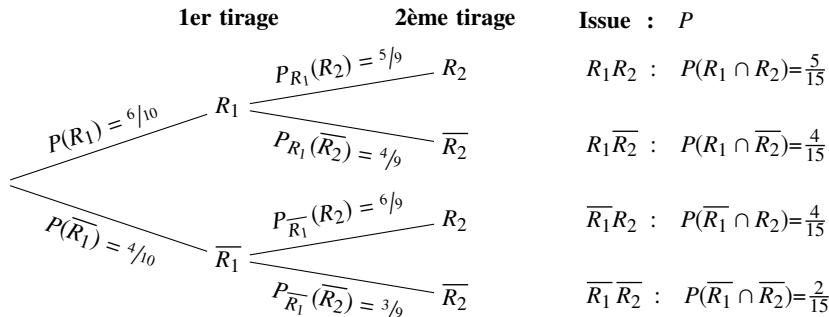
$$P(R_2) = \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15}$$

Exemple :

Une urne contient 6 boules rouges (R) et 4 boules vertes (\bar{R})

E : "choisir, successivement et sans remise, deux boules"

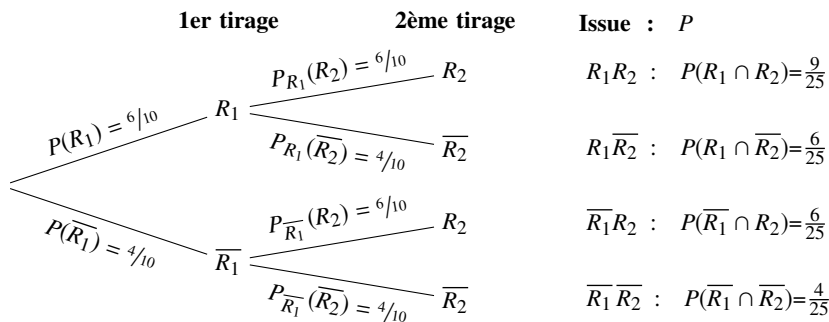
R_1 : "Rouge au 1^{er} tirage" R_2 : "Rouge au 2^{ème} tirage"



$$P(R_2) = \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} \quad \neq \quad P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{9}$$

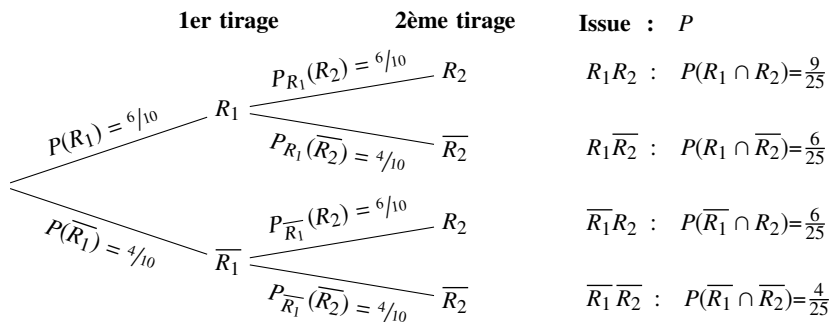
Exemple 2 : E : "choisir successivement et avec remise deux boules"

Exemple 2 : E : "choisir successivement et avec remise deux boules"



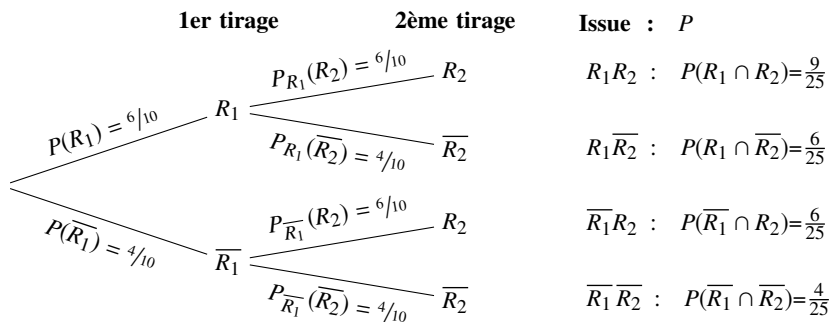
$$P(R_2) =$$

Exemple 2 : E : "choisir successivement et avec remise deux boules"



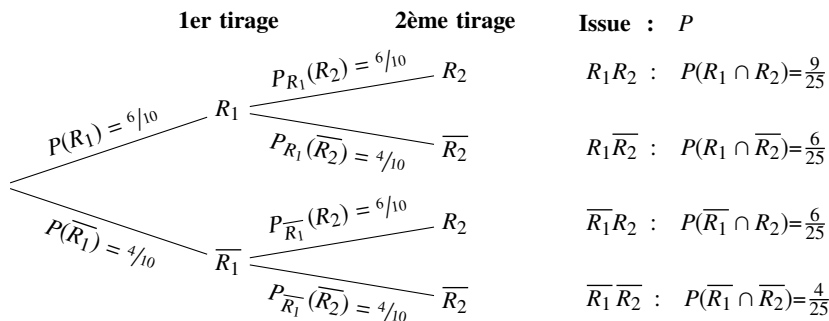
$$P(R_2) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Exemple 2 : E : "choisir successivement et avec remise deux boules"



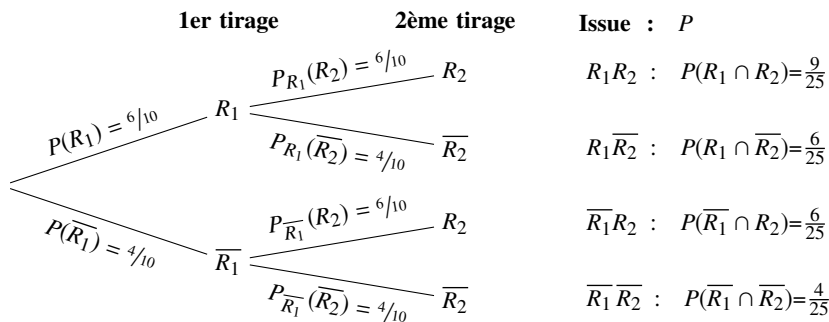
$$P(R_2) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = P_{R_1}(R_2) = \frac{6}{10} \implies$$

Exemple 2 : E : "choisir successivement et avec remise deux boules"



$$P(R_2) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = P_{R_1}(R_2) = \frac{6}{10} \implies R_1 \text{ et } R_2 \text{ indépendants}$$

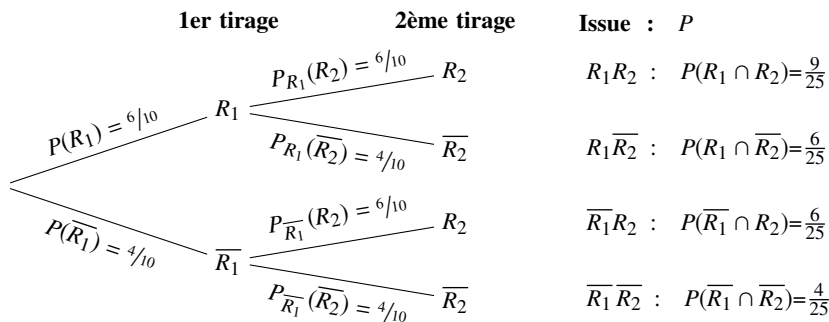
Exemple 2 : E : "choisir successivement et avec remise deux boules"



$$P(R_2) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = P_{R_1}(R_2) = \frac{6}{10} \implies R_1 \text{ et } R_2 \text{ indépendants}$$

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2)$$

Exemple 2 : E : "choisir successivement et avec remise deux boules"



$$P(R_2) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = P_{R_1}(R_2) = \frac{6}{10} \implies R_1 \text{ et } R_2 \text{ indépendants}$$

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2) \quad P(\overline{R_1} \cap R_2) = P(\overline{R_1}) \times P(R_2) \quad \dots$$

4. Partition

Définition 3 : (Partition de l'univers)

Soit $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ n évènements d'un univers Ω

Définition 3 : (Partition de l'univers)

Soit $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ n évènements d'un univers Ω

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forment
une **partition** de Ω \iff

Définition 3 : (Partition de l'univers)

Soit $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ n évènements d'un univers Ω

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forment
une **partition** de Ω



$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

et

$$\forall i \neq j$$

Définition 3 : (Partition de l'univers)

Soit $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ n évènements d'un univers Ω

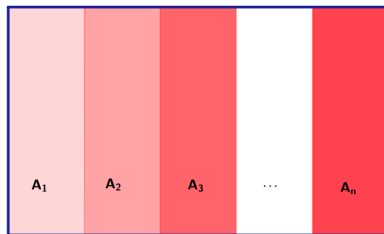
$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forment
une **partition** de Ω

\iff

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

et

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$



Ω

Exemple :

Soit A un évènement de Ω

$$A \cup \bar{A} =$$

Exemple :

Soit A un évènement de Ω

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

et

$$A \cap \bar{A} =$$

Exemple :

Soit A un évènement de Ω

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

et

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\implies A \text{ et } \bar{A}$$

Exemple :

Soit A un évènement de Ω

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

et

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

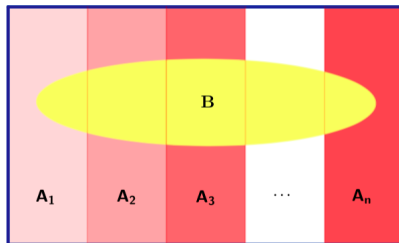
\implies A et \bar{A} forment une partition de Ω

Propriété 2 : (Probabilités totales)

Soit $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ une partition de Ω

Pour tout évènement B de Ω , on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$



Ω

Probabilité Conditionnelle

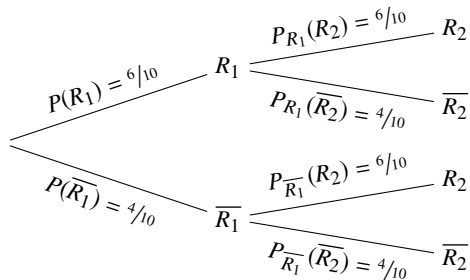
Partition - Probabilités totales

Exemple :

1er tirage

2ème tirage

Issue : P



$$R_1 R_2 : P(R_1 \cap R_2) = \frac{9}{25}$$

$$R_1 \overline{R_2} : P(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{6}{25}$$

$$\overline{R_1} R_2 : P(\overline{R_1} \cap R_2) = \frac{6}{25}$$

$$\overline{R_1} \overline{R_2} : P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \frac{4}{25}$$

R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de Ω

$$\implies P(R_2) =$$

Probabilité Conditionnelle

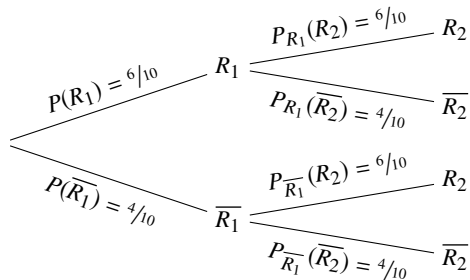
Partition - Probabilités totales

Exemple :

1er tirage

2ème tirage

Issue : P



$$R_1 R_2 : P(R_1 \cap R_2) = \frac{9}{25}$$

$$R_1 \overline{R_2} : P(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{6}{25}$$

$$\overline{R_1} R_2 : P(\overline{R_1} \cap R_2) = \frac{6}{25}$$

$$\overline{R_1} \overline{R_2} : P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \frac{4}{25}$$

R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de Ω

$$\implies P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R_1} \cap R_2)$$

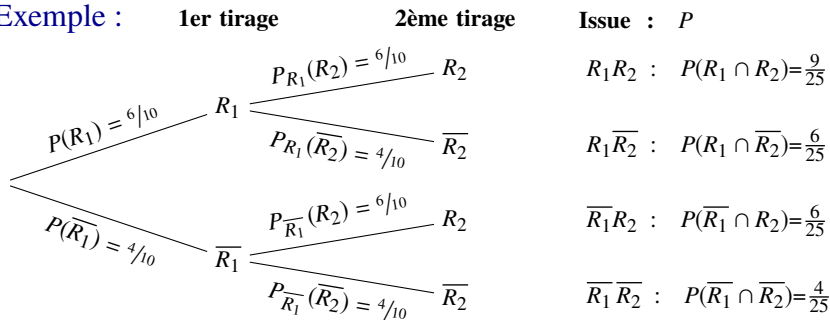
R_2 et $\overline{R_2}$ forment une partition de Ω

$$\implies P(R_1) =$$

Probabilité Conditionnelle

Partition - Probabilités totales

Exemple :



R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de Ω

$$\implies P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R_1} \cap R_2)$$

R_2 et $\overline{R_2}$ forment une partition de Ω

$$\implies P(R_1) = P(R_2 \cap R_1) + P(\overline{R_2} \cap R_1)$$

Exemple 2 : E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

1. Trouvez $P(M)$ sachant que :

○ $P(M \cap F) = 45\%$

○ $P(M \cap \overline{F}) = 40\%$

Exemple 2 : E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

1. Trouvez $P(M)$ sachant que :

◦ $P(M \cap F) = 45\%$

◦ $P(M \cap \bar{F}) = 40\%$

F et \bar{F} forment une partition de Ω

$\implies P(M) =$

Exemple 2 : E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

1. Trouvez $P(M)$ sachant que :

◦ $P(M \cap F) = 45\%$

◦ $P(M \cap \bar{F}) = 40\%$

F et \bar{F} forment une partition de Ω

$$\implies P(M) = P(M \cap F) + P(M \cap \bar{F}) = 85\%$$

2. Trouvez $P(M)$ sachant que :

◦ $P(M \cap F) = 45\%$

◦ $P(F \cap \bar{M}) = 10\%$

Exemple 2 : E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

1. Trouvez $P(M)$ sachant que :

◦ $P(M \cap F) = 45\%$

◦ $P(M \cap \overline{F}) = 40\%$

F et \overline{F} forment une partition de Ω

$$\implies P(M) = P(M \cap F) + P(M \cap \overline{F}) = 85\%$$

2. Trouvez $P(M)$ sachant que :

◦ $P(M \cap F) = 45\%$

◦ $P(F \cap \overline{M}) = 10\%$

Les données de l'énoncé ne permettent pas conclure.

Exemple 2 : E : "choisir un élève de la classe" F : "Fille" M : "Maths"

1. Trouvez $P(M)$ sachant que :

◦ $P(M \cap F) = 45\%$

◦ $P(M \cap \bar{F}) = 40\%$

F et \bar{F} forment une partition de Ω

$$\implies P(M) = P(M \cap F) + P(M \cap \bar{F}) = 85\%$$

2. Trouvez $P(M)$ sachant que :

◦ $P(M \cap F) = 45\%$

◦ $P(F \cap \bar{M}) = 10\%$

Les données de l'énoncé ne permettent pas conclure.

La seule chose qu'on peut déduire, c'est qu'il y a 55% de filles :

M et \bar{M} forment une partition de Ω

$$\implies P(F) = P(F \cap M) + P(F \cap \bar{M}) = 55\%$$