Correction DS01

Ch1 : Second degré

Durée de l'épreuve : **01h50**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (5 points)

1. Résoudre : $x^2 + 2x = -1$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x = -1 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$S = \{-1\}$

2. Résoudre : $-x^2 + 2x = -1$

$-x^2 + 2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 > 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} = 1 + \sqrt{2} \quad$ ou $\quad x = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{-2} = 1 - \sqrt{2}$

$S = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$

3. Résoudre : $x^2 + x \geq 2$

$x^2 + x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 \geq 0$

$\Delta = 1 - 4 \times (-2) \times 1 = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{-1 - 3}{2} = -2 \quad$ et $\quad x_2 = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $a > 0$

$S =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$

4. Mettre sous forme canonique la fonction $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{-4} = -1 \quad$ et $\quad f(\alpha) = -2 + 4 + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -2(x+1)^2 + 5$

5. Déterminer une expression de la fonction polynomiale du second degré dont la courbe $\mathscr{C}_g$:
   - a pour sommet le point $S(-1; 5)$
   - a pour intersection avec l'axe des ordonnées un point d'ordonnée 3.

   $S(-1; 5) \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1 \quad$ *et* $\quad \beta = 5 \quad \Rightarrow \quad g(x) = a(x+1)^2 + 5$

   $g(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad a + 5 = 3 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \quad \Rightarrow \quad g(x) = -2(x+1)^2 + 5$

Exercice 2 (5 points)

Soit la fonction $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit la fonction $g(x) = 2(x-1)(x-3)$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la forme canonique de f.
   $f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x - 3) = -\big((x-1)^2 - 1 - 3\big) = -(x-1)^2 + 4$

2. Déterminer les racines de f et dresser son tableau de signes.
   $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$
   $\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{-2-4}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \dfrac{-2+4}{-2} = -1$

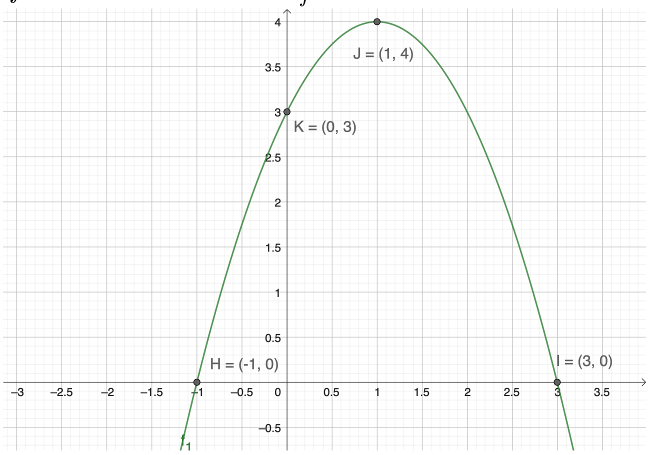
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car $a < 0$

3. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

car $a < 0$



4. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x + 3 = 2(x^2 - 4x + 3)$
   $\Leftrightarrow \quad -3x^2 + 10x - 3 = 0$
   $\Delta = 100 - 36 = 64 = 8^2$
   $\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{-10-8}{-6} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \dfrac{-10+8}{-6} = \dfrac{1}{3}$
   $S = \left\{\dfrac{1}{3} ; 3\right\}$

5. Déterminer les valeurs de x pour lequelles $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.
   $\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{C}_g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x)$
   $\Leftrightarrow \quad -3x^2 + 10x - 3 > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car $a < 0$

$S = \left]\dfrac{1}{3} ; 3\right[$

Exercice 3 (5 points)

Déterminer les racines de la fonction $f(x) = x^2 + 2mx - m + \dfrac{3}{4}$ en fonction de m.

$\Delta_f = (2m)^2 - 4 \times \left(-m + \dfrac{3}{4}\right) = 4m^2 + 4m - 3$

Pour étudier le signe du discrimant de f, on va étudier le signe de la fonction du second degré : $g(m) = 4m^2 + 4m - 3$

$\Delta_g = 4^2 + 4 \times 4 \times (-3) = 16 + 48 = 64 = 8^2 \ > 0$

La fonction g a donc deux racines disctinctes : $m_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta_g}}{2a} = \dfrac{-4-8}{8} = -\dfrac{3}{2}$ et $m_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta_g}}{2a} = \dfrac{-4+8}{8} = \dfrac{1}{2}$

et a donc le tableau de signes :

m	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $a > 0$

<u>1er cas :</u>

$m = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta_f = 0 \quad \Rightarrow \quad f$ a une racine double $x_0 = -\dfrac{2 \times \frac{1}{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$m = -\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta_f = 0 \quad \Rightarrow \quad f$ a une racine double $x_0 = -\dfrac{2 \times (-\frac{3}{2})}{2} = \dfrac{3}{2}$

<u>2ème cas :</u>

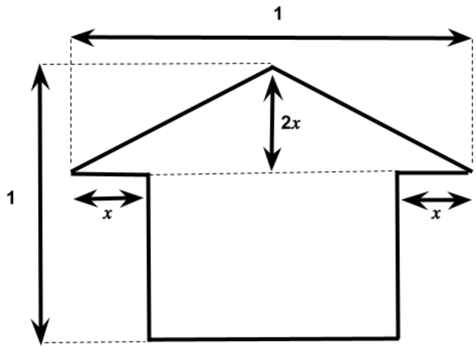
$m < -\dfrac{3}{2}$ ou $m > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta_f > 0 \Rightarrow f$ a deux racines $x_1 = \dfrac{-2m - \sqrt{g(m)}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2m + \sqrt{g(m)}}{2}$

<u>3ème cas :</u>

$-\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta_f < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ n'a pas de racine

Exercice 4 (5 points)

Déterminer la valeur de x minimisant l'aire de la maison représentée ci-contre.



x représente une longueur donc est positive.

De plus on ne peut pas dépasser ni la hauteur totale ni la longuer totale donc $x \leq \frac{1}{2}$

L'aire du triangle est : $\mathrm{A}_t(x) = \frac{1 \times 2x}{2} = x$

Et l'aire du rectangle est : $\mathrm{A}_r(x) = (1-2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$

Donc l'aire de la maison est : $\mathrm{A}(x) = \mathrm{A}_t(x) + \mathrm{A}_r(x) = 4x^2 - 3x + 1$

L'aire de la maison est modélisée par une fonction polynomiale du second degré avec a positif donc cette fonction atteint un minimum en $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{8} = \frac{3}{8}$

De plus, on a bien $0 \leq \frac{3}{8} \leq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{A}\left(\frac{3}{8}\right)$ est bien positif.

Donc l'aire de la maison est minimale pour $x = \frac{3}{8}$

Exercice bonus (optionnel) : Factoriser la fonction $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 3$

