- 1_SPE MATHS_5 - 1_SPE MATHS_15	Le 24 janvier 2022
Devoir Surveillé n°3: 2nd degré - Suite - Dérivation - Algorithmique	Durée: 01h55
Calculatrice autorisée Aucun document autorisé Réponses sur feuilles doubles numérotées	

Exercice 1 : (5 points) https://www.mathexien.com

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les **cinq** questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Question 1.

(u_n) est la suite arithmétique telle que $u_4 = 3$ et $u_{10} = 18$. On peut affirmer que :

a) $u_0 = 7$ **b)** $u_7 = 20,5$ $\boxed{\textbf{c)}\ u_{12} = 23}$ **d)** $u_{14} = -28$

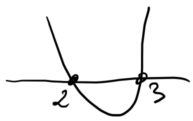
i) $u_{10} = u_4 + (10-4)r \Rightarrow r = \frac{u_{10}-u_4}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$
$\Rightarrow u_{12} = u_{10} + 2r = 18+5 = 23$
ii) par élimination : $u_4 < u_{10} \Rightarrow r > 0$ | $\Rightarrow u_0 < u_4 \Rightarrow$ a) faux
$\Rightarrow u_{14} > u_{12} \Rightarrow$ d) faux
$u_7 = \frac{u_{10}+u_4}{2} = 10,5 \Rightarrow$ b) faux

Question 2.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 5x + 6 < 0$ est :

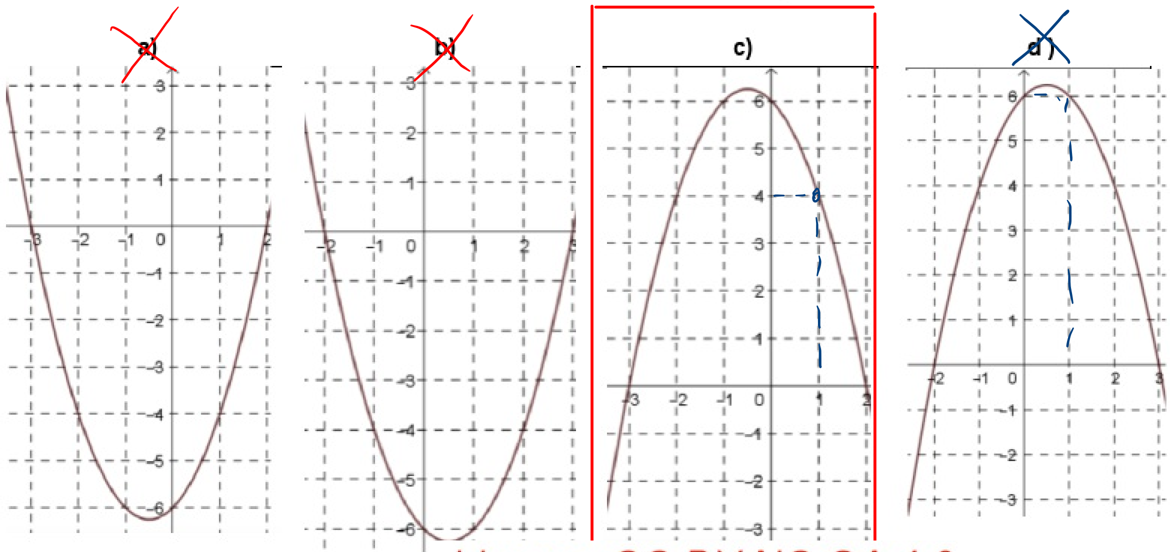
a) $]-\infty\,;2[\ \cup\ ]3\,;+\infty[$ **b)** $]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]6\,;+\infty[$ $\boxed{\textbf{c)}\ ]2\,;3[}$ **d)** $]-1\,;6[$

résolution complète ou simplement vérification des racines et signe de a
$2+3=5$
$2\times 3 = 6$
$x^2-5x+6=0$ | $\Rightarrow x_1 = 2$ et $x_2 = 3$
$a = 1 > 0$ | $\Rightarrow S =]2;3[$



Question 3.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - x + 6$. $f(1) = -1-1+6 = 4$
On admet que l'une des quatre courbes ci-dessous représente la fonction f. Laquelle ?



Question 4.

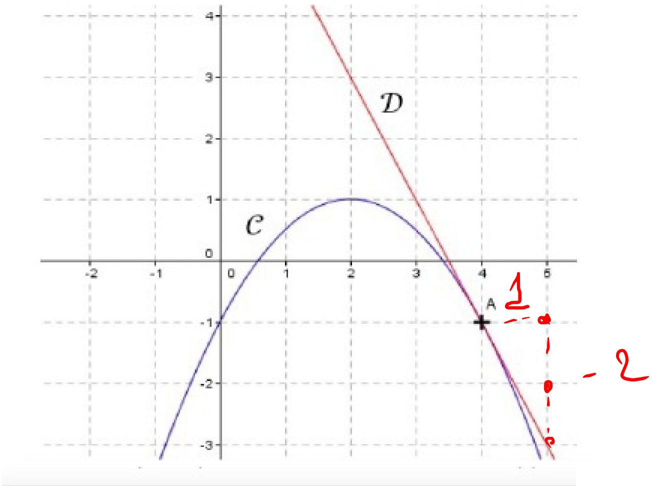
Sur la figure ci-dessous, nous avons tracé dans un repère orthonormé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.

Cette tangente est représentée par la droite $\mathscr{D}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Le réel $f'(4)$ est égal à :

a) -1 $\boxed{\textbf{b)} \ -2}$ **c)** 7 **d)** 1



Question 5.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 5$.
On souhaite qu'à la fin de l'exécution de l'algorithme, la valeur contenue dans la variable u soit celle de u_5.

Quel algorithme doit-on choisir ?

a)

```
u = 4
n = 0
for k in range(5):
    u = 3 * n - 5
    n = n + 1
```

formule de récurrence incorrecte

b)

```
u = 4
n = 0
for k in range(5):
    u_{n+1} = 3 * u_n - 5
    n = n + 1
```

variables inexistantes

c) (encadré)

```
u = 4
for k in range(5):
    u = 3 * u - 5
```

d)

```
u = 4
n = 0
while ≤ 5:
    u = 3 * n - 5
    n = n + 1
```

condition incomplète + formule de récurrence erronée

Exercice 2 : (5 points)

En 2000, la production mondiale de plastique était de 187 millions de tonnes.
On suppose que depuis 2000, cette production augmente de $3,7\ \%$ chaque année.

On modélise la production mondiale de plastique, en millions de tonnes, produite en l'année $(2000 + n)$ par la suite de terme général u_n où n désigne le nombre d'années à partir de l'an 2000.

Ainsi, $u_0 = 187$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

$u_{n+1} = u_n + 3{,}7\% \times u_n = 1{,}037\, u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}037 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_n)$ suite géométrique de raison $q = 1{,}037$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

$\begin{cases} u_0 = 187 \\ u_{n+1} = 1{,}037 . u_n \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow u_n = 187 . (1{,}037)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}037 > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right/ \Rightarrow u_{n+1} > u_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_n)$ croissante

4. Selon cette estimation, calculer la production mondiale de plastique en 2019. Arrondir au million de tonnes.

$u_{19} = 187 \times (1{,}037)^{19} \simeq 373$ millions de tonnes

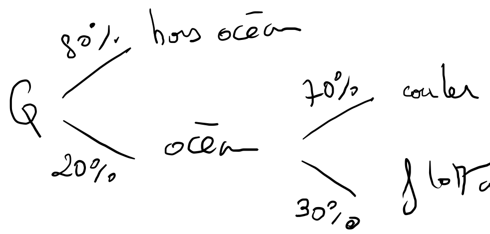
5. Des études montrent que 20 % de la quantité totale de plastique se retrouve dans les océans, et que 70 % de ces déchets finissent par couler.
Montrer que la quantité totale, arrondie au million de tonnes, de déchets flottants sur l'océan dus à la production de plastique de 2000 à 2019 compris est de 324 millions de tonnes.

Production totale de 2000 à 2019 :

$$Q = \sum_{i=0}^{19} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_{19} = u_0 \cdot \sum_{i=0}^{19} q^i = u_0 \, \frac{1-q^{19+1}}{1-q}$$

$$= 187 \cdot \frac{1 - 1{,}037^{20}}{1 - 1{,}037}$$

$$\simeq 5\,398 \text{ milliards de tonnes}$$



flottant $= Q \times 0{,}2 \times 0{,}3$

$\simeq 324$ millions de tonne

Exercice 4 : (5 points)

Soit (P) la parabole d'équation $y = ax^2 + x + 1$ avec a un réel non nul. $\quad a \in \mathbb{R}^* \quad (1)$

Donner une condition sur a pour que (P) coupe la droite (D) d'équation $y = 2x + 3$ en au moins un point.

Les points d'intersection de (P) et (D) ont pour abscisse les solutions de l'équation :

$$ax^2 + x + 1 = 2x + 3 \iff ax^2 - x - 2 = 0$$

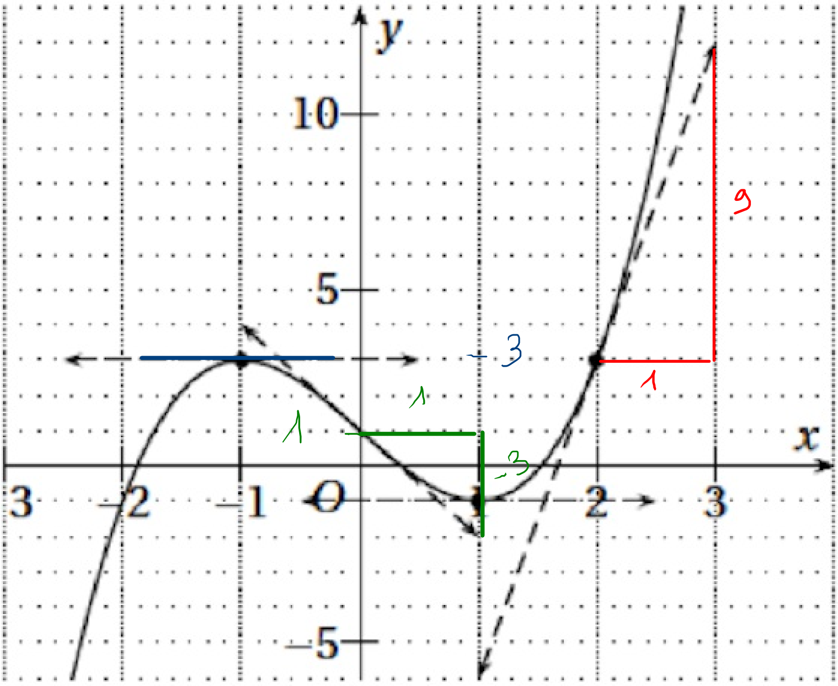
$$\Delta = 1 + 8a$$

$$\Delta \geqslant 0 \iff 1 + 8a \geqslant 0 \iff a \geqslant -\frac{1}{8} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow a \in \left[-\tfrac{1}{8} ; 0\right[\cup \left]0 ; +\infty\right[$$

Exercice 3 : (5 points)

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans un repère orthogonal.



1. Déterminer graphiquement:

a. $f(0)$ et $f'(0)$

b. $f(-1)$ et $f'(-1)$

c. $f(2)$ et $f'(2)$

$f(0) = 1$ et $f'(0) = -3$

$f(-1) = 3$ et $f'(-1) = 0$ (tangente horizontale)

$f(2) = 3$ et $f'(2) = 9$

d. L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1

T_{-1} : $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

$y = 0 \times (x+1) + 3$

$y = 3$

e. L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0

T_0 : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$= -3x+1$

2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées (1 ; 26)

a. Déterminer par le calcul une équation de T **b.** En déduire $f'(-2)$

T : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ $\Rightarrow 26 = f'(-2)(1+2) + (-1)$

$A \in T$

$\Rightarrow f'(-2) = \frac{27}{3} = 9$

$\Rightarrow$ T : $y = 9(x+2) - 1$

$y = 9x + 18 - 1$

$y = 9x + 17$