

<https://www.mathexien.com>

Exercice 1: (5 points)

Calculer les dérivées des fonctions:

1pt 1.1. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ dérivable sur \mathbb{R}

$$f'(x) = 2 \times 3x + 2 \times 1 = 6x + 2$$

1pt 1.2. $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ dérivable sur \mathbb{R}^*

$$g(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

1pt 1.3. $h(x) = (-2x + 5)^7$ dérivable sur \mathbb{R}

Soit $i(x) = x^7$

$$h(x) = i(-2x + 5)$$

$$\Rightarrow h'(x) = -2 \times i'(-2x + 5)$$

$$= -2 \times 7x^6 (-2x + 5)$$

$$= -14 (-2x + 5)^6$$

Démontrer la formule de la dérivée de :

2pt 1.4. $f(x) = x^2$ $\mathbb{D}f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\Delta_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= 2x + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_x(h) = 2x \Rightarrow f \text{ dérivable en } x$$

Donc f dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 2x$

Ch2 : Dérivation
Dérivée des fonctions usuelles

Propriété 2 : (dérivée des fonctions usuelles)

Nom	fonction	fonction dérivée	dérivable sur
Constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
Affine	$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	\mathbb{R}
Carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
Puissance	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R} \forall n > 0$ et $\mathbb{R}^* \forall n < 0$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
Racine	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}^{++}

Ch2 : Dérivation
Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 3 : (Opérations sur les fonctions dérivées)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I et k une constante $\in \mathbb{R}$

Produit par k	$kf : x \mapsto kf(x)$	$(kf)' = kf'$
Somme	$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$	$(f + g)' = f' + g'$
Produit	$fg : x \mapsto f(x)g(x)$	$(fg)' = f'g + fg'$
Inverse	$\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
Quotient	$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Ch2 : Dérivation
Composition de fonctions

Propriété 4 : (Composition de fonctions)

Soit h une fonction dérivables sur I et J l'image de I par h
Soit g une fonction dérivable sur J

Soit f la fonction composée : $f(x) = g(h(x))$
 $f : x \mapsto h(x) \mapsto g(h(x))$

Si $h(x) = ax + b$, alors $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = a \times g'(ax + b)$$

NB : Dans le cas général, $f(x) = g(h(x))$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = g'(h(x)) \times g'(h(x))$$

Exercice 2: (5 points)

Soit $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ et a un réel

1 pt 2.1. Calculer la dérivée de f f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f(x) = \frac{x-3+6}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{6}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x-3)^2}$$

1 pt 2.2. Calculer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 : T_0

$$\begin{aligned} T_0: y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= -\frac{6}{3}x + (-1) \\ &= -\frac{2}{3}x - 1 \end{aligned}$$

Ch2 : Dérivation
Tangente

Propriété 1 : (tangente)

Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative \mathcal{C}_f admet une **tangente** au point d'abscisse a :

- de coefficient directeur $f'(a)$
- d'équation réduite : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

1 pt 2.3. Calculer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a : T_a

$$\begin{aligned} T_a: y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= -\frac{6}{(a-3)^2}(x-a) + \frac{a+3}{a-3} \end{aligned}$$

2.4. Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f parallèle à T_0 puis à T_a

$$\begin{aligned} (+1) T_2 \parallel T_0 &\Leftrightarrow f'(x) = f'(0) \\ \Leftrightarrow -\frac{6}{(x-3)^2} &= -\frac{2}{3} \Leftrightarrow (x-3)^2 = 9 \Leftrightarrow (x-3-3)(x-3+3) = 0 \\ \Leftrightarrow x=0 &\text{ ou } x=6 \Rightarrow T_6 \parallel T_0 \end{aligned}$$

$$T_6: y = -\frac{2}{3}(x-6) + 3$$

$$\begin{aligned} (+1) T_x \parallel T_a &\Leftrightarrow f'(x) = f'(a) \\ \Leftrightarrow -\frac{6}{(x-3)^2} &= -\frac{6}{(a-3)^2} \Leftrightarrow (x-3)^2 = (a-3)^2 \Leftrightarrow (x-3-a+3)(x-3+a-3) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-a)(x+a-6) &= 0 \Leftrightarrow x=a \text{ ou } x=6-a \\ \Rightarrow T_{6-a} &\parallel T_a \end{aligned}$$

$$T_{6-a}: y = -\frac{6}{(a-3)^2}(x-(6-a)) + \frac{9-a}{3-a}$$

2.5. Etudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et T_0 puis de \mathcal{C}_f et T_a

2 pt

$$D_0(x) = \frac{x+3}{x-3} - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{x+3 + \frac{2}{3}x(x-3) + x-3}{x-3} = \frac{x + \frac{2}{3}x^2 - 2x + x}{x-3}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{x-3}$$

$$D_0(x) > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \Rightarrow \mathcal{C}_f \text{ au-dessus de } T_0 \text{ sur }]3; +\infty[$$

$$D_0(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_f \text{ et } T_0 \text{ se coupent en } x=0$$

$$D_0(x) < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3 \Rightarrow \mathcal{C}_f \text{ en-dessous de } T_0 \text{ sur }]-\infty; 3[$$

(+2)

$$D_a(x) = \frac{x+3}{x-3} - \left(-6 \frac{x-a}{(a-3)^2} + \frac{a+3}{a-3}\right) = \frac{6}{(a-3)^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{x-3}$$

$$D_a(x) > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \Rightarrow \mathcal{C}_f \text{ au-dessus de } T_a \text{ sur }]3; +\infty[$$

$$D_a(x) = 0 \Leftrightarrow x-a = 0 \Leftrightarrow x = a \Rightarrow \mathcal{C}_f \text{ et } T_a \text{ se coupent en } x=a$$

$$D_a(x) < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3 \Rightarrow \mathcal{C}_f \text{ en-dessous de } T_a \text{ sur }]-\infty; 3[$$

Exercice 3: (5 points)

Yasmina et Kawtar se déplacent sur une droite et leur position sur un axe orienté est donnée par :

$$f(t) = 2t^2 \text{ pour Yasmina et } g(t) = -2t^2 + 6t + 4 \text{ pour Kawtar}$$

Déterminer leur vitesse et leur accélération au moment de leur rencontre. Commenter.

$v_y(t) = f'(t)$	$v_k(t) = g'(t)$
$= 4t$ 1/2 pt	$= -4t + 6$ 1/2 pt
$a_y(t) = 4$ 1/2 pt	$a_k(t) = -4$ 1/2 pt

$$f(t) = g(t) \Leftrightarrow 2t^2 = -2t^2 + 6t + 4 \Leftrightarrow -4t^2 + 6t + 4 = 0 \quad 1 \text{ pt}$$

$$\Leftrightarrow -2t^2 + 3t + 2 = 0 \quad \Delta = 9 + 16 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{-3-5}{-4} = 2 \quad \text{ou} \quad t_2 = \frac{-3+5}{-4} = -\frac{1}{2} < 0 \text{ donc impossible}$$

$$\Rightarrow Y \text{ et } K \text{ se rencontrent en } t=2 \quad 1 \text{ pt}$$

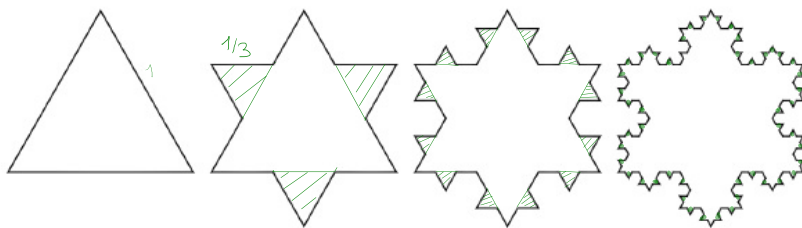
$$v_y(2) = 8 \text{ et } v_k(2) = -2 \Rightarrow \text{à ce moment } Y \text{ et } K \text{ se dirigent en } \underline{\text{sens inverse}}$$

1/2 pt et Y va 4 fois plus vite que K 1/2 pt

Exercice 4: (5 points)

On considère un triangle équilatéral de côté de longueur 1

On construit le flocon de Koch de à l'étape $n + 1$ à partir du triangle à l'étape n comme suit:



Chaque segment est divisé en 3 segments de même longueur et on construit sur le segment du milieu un triangle équilatéral à l'extérieur du flocon

1,5 pt a. s_n représentant le nombre de segments à l'étape n 3 12 48 192 1/2 pt

Chaque segment à l'étape n donne 4 segments à l'étape $n+1$:

$$\begin{cases} s_1 = 3 \\ s_{n+1} = 4s_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow s_n = 3 \times 4^{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad 1/2 \text{ pt}$$

1,5 pt b. p_n représentant le périmètre du flocon à l'étape n 3 4 16/3 64/9 1/2 pt

La longueur d'un segment à l'étape $n+1$ est le tiers de celle de l'étape n :

$$\begin{cases} p_1 = 3 \times 1 \\ p_{n+1} = 4 \times \frac{1}{3} p_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 3 \\ p_{n+1} = \frac{4}{3} p_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad 1/2 \text{ pt}$$

$$\Rightarrow p_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad 1/2 \text{ pt}$$

1,5 pt c. b_n représentant l'aire additionnelle du flocon à l'étape n (l'aire initiale pour le premier terme) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\frac{\sqrt{3}}{12}$ $\frac{\sqrt{3}}{27}$

Chaque nouveau triangle est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ du précédent, donc son aire est réduite de $\frac{1}{9}$ 1/2 pt

Chaque segment à l'étape n donne un nouveau triangle à l'étape $n+1$:

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ b_2 = 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ b_{n+1} = 4 \times \frac{1}{9} \times b_n \quad \forall n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow b_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad 1/2 \text{ pt}$$

1 pt d. a_n représentant l'aire du flocon à l'étape n

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^n b_i = b_1 + \sum_{i=2}^n b_i = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{i=2}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{i-2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{4}{9}\right)^j \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{9}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{5 \cdot 4} - \frac{3\sqrt{3}}{5 \cdot 4} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

1,5 pt 4.5. Conjecturez sur la limite de chaque suite

$$s_n = 3 \times 4^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad 1/2 \text{ pt} \quad b_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad 1/2 \text{ pt} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{8}{5} a_1 \quad 1/2 \text{ pt}$$