# Correction DS Commun 1

## Rotation B

2nd degré - Suites - Probabilité conditionnelles - Dérivation - Application de la dérivation

Durée de l'épreuve : **01h55**

*L'usage de la calculatrice en mode examen est autorisé.*
*Le candidat indique son nom et celui de son professeur sur chaque feuille.*
*Il commence chaque exercice sur une nouvelle feuille et numérote ses pages*
*Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*
*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.*

**Exercice 1 (5 points)**

Au 1er janvier 2023, un club de sport et de fitness avait 500 clients inscrits.

Une étude de marché a permis d'établir qu'à partir du 1er janvier 2024, et ce chaque année :
5 % des clients ne renouvèlent pas leur abonnement tandis que 80 nouvelles personnes s'inscrivent.

Pour tout entier naturel $n$, on appelle $u_n$ le nombre de clients de ce club le 1er janvier de l'année $(2023+n)$.

**1.** Justifier que $u_0 = 500$, puis calculer $u_1$ et $u_2$. (1 pt)
La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier les réponses.

$u_0$ représente le nombre de clients du club au 1er janvier de l'année $(2023+0)$ donc de l'année 2023. Or d'après l'énoncé le nombre de clients au 1er janvier 2023 était de 500, d'où $u_0 = 500$.

Au 1er janvier 2024 :
le club perd 5% des 500 inscrits, soit 25 clients et gagne 80 clients additionnels, d'où $u_1 = 500 - 25 + 80 = 555$

Au 1er janvier 2025 :
le club perd 5% des 555 inscrits et gagne 80 clients additionnels, d'où $u_2 = 555 - 27,75 + 80 = 607,25$

$$\left.\begin{array}{r} u_1 - u_0 = 55 \\ u_2 - u_1 = 52,25 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0 \Longrightarrow (u_n) \text{ n'est pas une suite arithmétique}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{555}{500} = 1,11 \\ \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{607,25}{555} \simeq 1,09 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0} \Longrightarrow (u_n) \text{ n'est pas une suite géométrique}$$

**2.** Expliquer pourquoi on a, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 80$. (0,5 pt)

Chaque année $(n+1)$, le club perd 5% du nombre de clients de l'année précédente $(n)$, donc on retire 5% des clients de l'année $(n)$, tandis que 80 nouvelles personnes s'inscrivent, donc on ajoute 80 nouveaux clients, d'où :

$$u_{n+1} = u_n - 5\% \times u_n + 80 = 95\% \times u_n + 80 = 0,95\, u_n + 80$$

**3.** Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 1\,600$. Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,95 et calculer son premier terme $v_0$. (1,5 pt)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1600 \\ &= (0,95u_n + 80) - 1600 && (\text{car } u_{n+1} = 0,95u_n + 80) \\ &= 0,95u_n - 1520 \\ &= 0,95(v_n + 1600) - 1520 && (\text{car } u_n = v_n + 1600) \\ &= 0,95v_n + 1520 - 1520 \\ &= 0,95v_n \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 0,95v_n$ donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1600 = 500 - 1600 = -1100$

**4.** Exprimer $(v_n)$ en fonction de $n$ et en déduire que pour tout entier naturel $n$ : (1 pt)
$u_n = 1\,600 - 1\,100 \times 0,95^n$.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} v_{n+1} = 0,95v_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ v_0 = -1100 \end{array}\right\} \Rightarrow v_n = -1100 \times 0,95^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_n = v_n + 1600 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n = 1\,600 - 1\,100 \times 0,95^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**5.** A l'aide de votre calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le club peut espérer voir son nombre d'adhérents dépasser la barre des 1 000 ? Justifier. (1 pt)

$u_{11} = 1\,600 - 1\,100 \times 0,95^{11} \simeq 974 < 1000$
$u_{12} = 1\,600 - 1\,100 \times 0,95^{12} \simeq 1005 > 1000$

Donc le club verra son nombre d'adhérents dépasser la barre des 1000 au bout de 12 années.

## Exercice 2 (5 points)

Un artisan fabrique des boîtes à bijoux en bois. Il peut en fabriquer 200 par mois maximum. On suppose que toutes les boîtes à bijoux que l'artisan fabrique sont vendues. Grâce à un logiciel de mathématiques, on a réussi à modéliser le coût de fabrication en euros de $x$ boîtes. La fonction coût $C$ est définie par : $C(x) = 0,23x^2 + 4x + 300$.

**1.** Déterminer $C(0)$ puis interpréter votre résultat. (0,5 pt)
$C(0) = 300$
Les coûts fixes sont de 300 €.

**2.** Quel est le coût de fabrication pour 30 boîtes à bijoux fabriquées ? (0,5 pt)
$C(30) = 0,23 \times 30^2 + 4 \times 30 + 300 = 627$
Le coût de fabrication de 30 boîtes est de 627 €.

Une boîte est vendue 50 € pièce. On note $R(x)$ la recette, en euros, engendrée par la vente de $x$ boîtes.

**3.** Exprimer $R(x)$ en fonction de $x$. (0,5 pt)
$R(x) = 50x$

**4.** Montrer que le bénéfice, en euros, engendrée par la vente de $x$ boîtes est donnée par la fonction $B$ définie sur $[0\,;\,200]$ par $B(x) = -0,23x^2 + 46x - 300$. (0,5 pt)

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 50x - (0,23x^2 + 4x + 300) \\ &= 50x - 0,23x^2 - 4x - 300 \\ &= -0,23x^2 + 46x - 300 \end{aligned}$$

**5.** Calculer $B(5)$ puis interpréter votre résultat. (0,5 pt)
$B(5) = -0,23 \times 5^2 + 46 \times 5 - 300 = -75,75$
Le bénéfice engendré par la vente de 5 boîtes est de -75,75 €, soit une perte de 75,75 €.

**6.** Combien de boîtes à bijoux doit fabriquer l'artisan s'il souhaite faire un bénéfice ? (1,5 pt)

$B(x) > 0 \iff -0,23x^2 + 46x - 300 > 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 46^2 - 4 \times (-0,23) \times (-300) \\ &= 1840 = \left(4\sqrt{115}\right)^2 > 0 \quad \text{donc } B \text{ a deux racines distinctes.}\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-46-4\sqrt{115}}{2\times(-0,23)} = \frac{46+4\sqrt{115}}{0,46} = 100 + \frac{4}{0,46}\sqrt{115} \simeq 193,25 < 200$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-46+4\sqrt{115}}{2\times(-0,23)} = \frac{46-4\sqrt{115}}{0,46} = 100 - \frac{4}{0,46}\sqrt{115} \simeq 6,75 > 0$$

$B$ étant une fonction du second degré de la forme $ax^2 + bc + c$ avec $a$ négatif, $B$ est positive entre ses deux racines ce qui donne le tableau de signe suivant (B est définie sur $[0\,;\,200]$) :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $x_2$ | | $x_1$ | | $200$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B(x)$ | | | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | | |

Ainsi, pour que le bénéficie soir strictement positif, l'artisan doit fabriquer entre 7 et 193 boîtes.

**7.** L'artisan espère faire un bénéfice de 2 500 €. Est-ce possible ? Si oui, combien de boîtes devra-t-il fabriquer pour atteindre cet objectif ? Si non, expliquer pourquoi. (1 pt)

$B$ étant une fonction du second degré de la forme $ax^2 + bc + c$ avec $a$ négatif, $B$ a un maximum qu'il atteint en :

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 100$ (qui appartient bien à l'intervalle $[0\,;\,200]$)

Ce maximum vaut :

$\beta = B(\alpha) = 2000$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $\alpha = 100$ | | $200$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | | $-300$ | $\nearrow$ | $\beta = 2000$ | $\searrow$ | -300 | |

Le bénéfice maximal étant de 2 000 €, l'artisan ne pourra pas obtenir un bénéfice plus grand, donc il ne pourra pas obtenir un bénéfice de 2 500 €.

Autre méthode :

On essaie de résoudre l'équation :

$B(x) = 2500 \iff -0,23x^2 + 46x - 300 = 2500 \iff -0,23x^2 + 46x - 2800 = 0$

$\Delta = 46^2 - 4 \times (-0,23) \times (-2800) = 46^2 - 4 \times 0,23 \times 2800 = -460$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution donc le bénéfice ne peut pas être égal à 2500 €.

**Exercice 3 (5 points)**

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

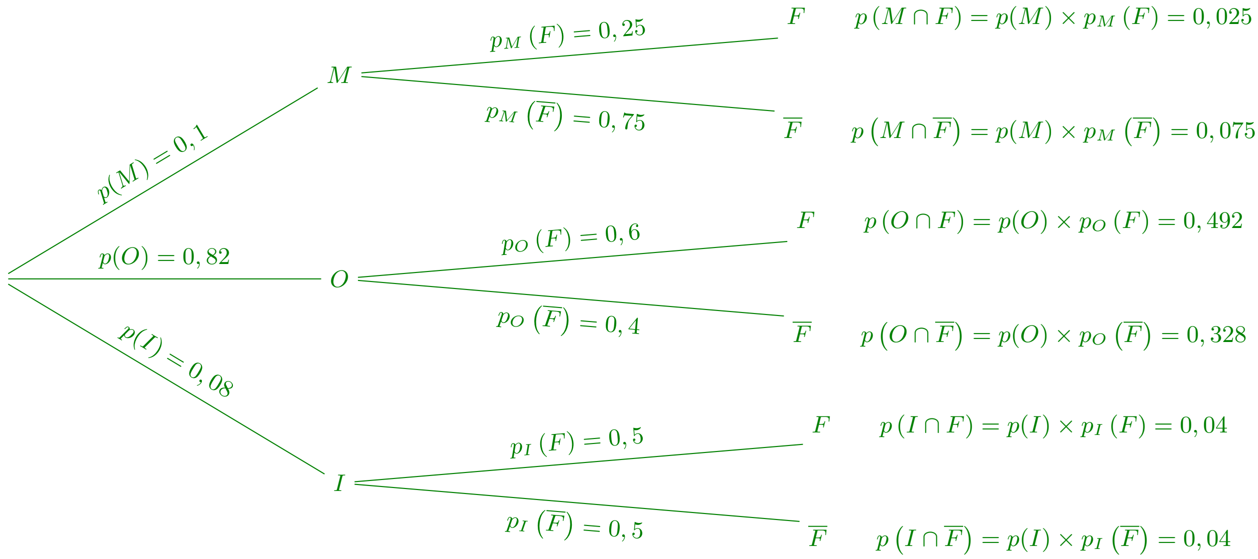
Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.

On note :

- $M$ l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- $O$ l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- $I$ l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- $F$ l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

**1.** Construire un arbre pondéré correspondant aux données. (1,5 pt)




**2.** Calculer la probabilité d'interroger :

**a.** un agent de maintenance ; (0,5 pt)

$p(M) = 1 - p(O) - p(I) = 1 - 0,82 - 0,08 = 0,1 = 10\%$

**b.** une femme agent de maintenance ; (0,5 pt)

$p(M \cap F) = p(M) \times p_M(F) = 0,025 = 2,5\%$

**c.** une femme. (1 pt)

$M$, $O$ et $I$ forment une partition de $F$ donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(F) &= p(F \cap M) + p(F \cap O) + p(F \cap I) \\ &= p(M) \times p_M(F) + p(O) \times p_O(F) + p(I) \times p_I(F) \\ &= 0,025 + 0,492 + 0,04 = 0,557 = 55,7\% \end{aligned}$$

**3.** La personne choisie est une femme. (1,5 pt)
Calculer la probabilité qu'elle soit une ingénieure.

$$\begin{aligned} p_F(I) &= \frac{p((F \cap I)}{p(F)} \\ &= \frac{0,04}{0,557} \simeq 0,072 = 7,2\% \end{aligned}$$

**Exercice 4 (5 points)**

Soit $f$ la fonction définit sur $[0\,;\,0,5]$ par $f(x)=\sqrt{1-2x}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On admet que $f$ est dérivable sur $[0\,;\,0,5[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

**1.** Montrer que $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$. (0,5 pt)

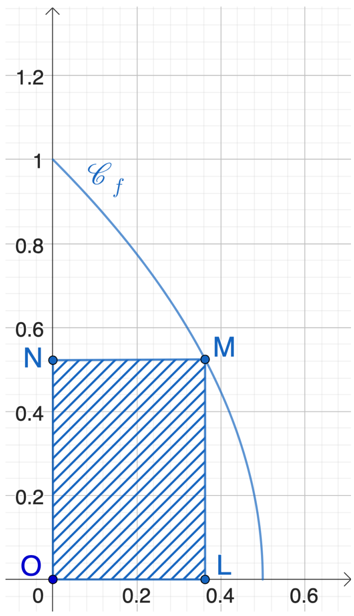
$f(x)=g(1-2x)$ avec $g(x)=\sqrt{x}$ et $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

D'où : $f'(x)=(1-2x)'\times g'(1-2x)=-2\times\dfrac{1}{2\sqrt{1-2x}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$

**2.** Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. (1 pt)

$$T_0:\quad \begin{aligned} y &= f'(0)(x-0)+f(0)\\ &= -1\times x+1\\ &= -x+1\end{aligned}$$

On considère le point $M$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x$ comprise entre 0 et $0,5$.
On essaie de maximiser l'aire du rectangle $LMNO$ représenté ci-contre.
On modélise son aire par une fonction $A(x)$.
On admet que $A$ est dérivable sur $[0\,;\,0,5[$ et on note $A'$ sa fonction dérivée.




**3.** Montrer que $A(x)=x\sqrt{1-2x}$. (0,5 pt)

$$\begin{aligned} A(x) &= OL\times ON\\ &= x\times f(x)\\ &= x\sqrt{1-2x}\end{aligned}$$

**4.** Montrer que $A'(x)=\dfrac{-3x+1}{\sqrt{1-2x}}$. (1 pt)

$$\begin{aligned} A'(x) &= (x)'\sqrt{1-2x}+x\left(\sqrt{1-2x}\right)'\\ &= 1\times\sqrt{1-2x}+x\times\left(-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)\\ &= \sqrt{1-2x}-\frac{x}{\sqrt{1-2x}}\\ &= \frac{\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{1-2x}-x}{\sqrt{1-2x}}\\ &= \frac{1-2x-x}{\sqrt{1-2x}}\\ &= \frac{1-3x}{\sqrt{1-2x}}\end{aligned}$$

**5.** Déterminer le tableau de variation de $A$. (1 pt)

$1 - 2x > 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$ donc $\sqrt{1-2x}$ est définie et strictement positive sur $[0\,;\,0,5[$ et donc le signe de $A(x)$ sur $[0\,;\,0,5[$ ne dépend que de $-3x+1$

$1 - 3x \geq 0 \iff x \leq \dfrac{1}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $0{,}5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | | | | $+$ | $0$ | $-$ | | | |
| $A$ | | | $0$ | $\nearrow$ | $A\left(\frac{1}{3}\right)$ | $\searrow$ | $0$ | | |

**6.** En déduire les dimensions du rectangle $LMNO$ pour que son aire soit maximale. (1 pt)

D'après le tableau de variation, l'aire est maximale pour $x = \dfrac{1}{3}$.

Le point $M$ a alors pour coordonnées : $M\left(\dfrac{1}{3}\,;\,f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$

Et le rectangle $LMNO$ a alors pour dimensions :

$OL = \dfrac{1}{3}$

$ON = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{1 - 2 \times \dfrac{1}{3}} = \sqrt{1 - \dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$