DS Commun 1

Rotation B

2nd degré - Suites - Probabilité conditionnelles - Dérivation - Application de la dérivation

Durée de l'épreuve : **01h55**

L'usage de la calculatrice en mode examen est autorisé.
Le candidat indique son nom et celui de son professeur sur chaque feuille.
Il commence chaque exercice sur une nouvelle feuille et numérote ses pages
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (5 points)

Au 1er janvier 2023, un club de sport et de fitness avait 500 clients inscrits.

Une étude de marché a permis d'établir qu'à partir du 1er janvier 2024, et ce chaque année :
5 % des clients ne renouvèlent pas leur abonnement tandis que 80 nouvelles personnes s'inscrivent.

Pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre de clients de ce club le 1er janvier de l'année $(2023+n)$.

1. Justifier que $u_0 = 500$, puis calculer u_1 et u_2. (1 pt)
   La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier les réponses.
2. Expliquer pourquoi on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 80$. (0,5 pt)
3. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 1\,600$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,95 et calculer son premier terme v_0. (1,5 pt)
4. Exprimer (v_n) en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n : (1 pt)
   $u_n = 1\,600 - 1\,100 \times 0,95^n$.
5. A l'aide de votre calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le club peut espérer voir son nombre d'adhérents dépasser la barre des 1 000 ? Justifier. (1 pt)

Exercice 2 (5 points)

Un artisan fabrique des boîtes à bijoux en bois. Il peut en fabriquer 200 par mois maximum. On suppose que toutes les boîtes à bijoux que l'artisan fabrique sont vendues. Grâce à un logiciel de mathématiques, on a réussi à modéliser le coût de fabrication en euros de x boîtes. La fonction coût C est définie par : $C(x) = 0,23x^2 + 4x + 300$.

1. Déterminer $C(0)$ puis interpréter votre résultat. (0,5 pt)
2. Quel est le coût de fabrication pour 30 boîtes à bijoux fabriquées ? (0,5 pt)

Une boîte est vendue 50 € pièce. On note $R(x)$ la recette, en euros, engendrée par la vente de x boîtes.

3. Exprimer $R(x)$ en fonction de x. (0,5 pt)
4. Montrer que le bénéfice, en euros, engendrée par la vente de x boîtes est donnée par la fonction B définie sur $[0\,;\,200]$ par $B(x) = -0,23x^2 + 46x - 300$. (0,5 pt)
5. Calculer $B(5)$ puis interpréter votre résultat. (0,5 pt)
6. Combien de boîtes à bijoux doit fabriquer l'artisan s'il souhaite faire un bénéfice ? (1,5 pt)
7. L'artisan espère faire un bénéfice de 2 500 €. Est-ce possible ? Si oui, combien de boîtes devra-t-il fabriquer pour atteindre cet objectif ? Si non, expliquer pourquoi. (1 pt)

Exercice 3 (5 points)

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :
- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.

On note :
- M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données. (1,5 pt)
2. Calculer la probabilité d'interroger :
   a. un agent de maintenance ; (0,5 pt)
   b. une femme agent de maintenance ; (0,5 pt)
   c. une femme. (1 pt)
3. La personne choisie est une femme. (1,5 pt)
   Calculer la probabilité qu'elle soit une ingénieure.

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définit sur $[0\,;\,0,5]$ par $f(x) = \sqrt{1-2x}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On admet que f est dérivable sur $[0\,;\,0,5[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$. (0,5 pt)
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. (1 pt)

On considère le point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x comprise entre 0 et 0,5.
On essaie de maximiser l'aire du rectangle $LMNO$ représenté ci-contre.
On modélise son aire par une fonction $A(x)$.
On admet que A est dérivable sur $[0\,;\,0,5[$ et on note A' sa fonction dérivée.

3. Montrer que $A(x) = x\sqrt{1-2x}$. (0,5 pt)
4. Montrer que $A'(x) = \dfrac{-3x+1}{\sqrt{1-2x}}$. (1 pt)
5. Déterminer le tableau de variation de A. (1 pt)
6. En déduire les dimensions du rectangle $LMNO$ pour que son aire soit maximale. (1 pt)