Dérivation

MatheX

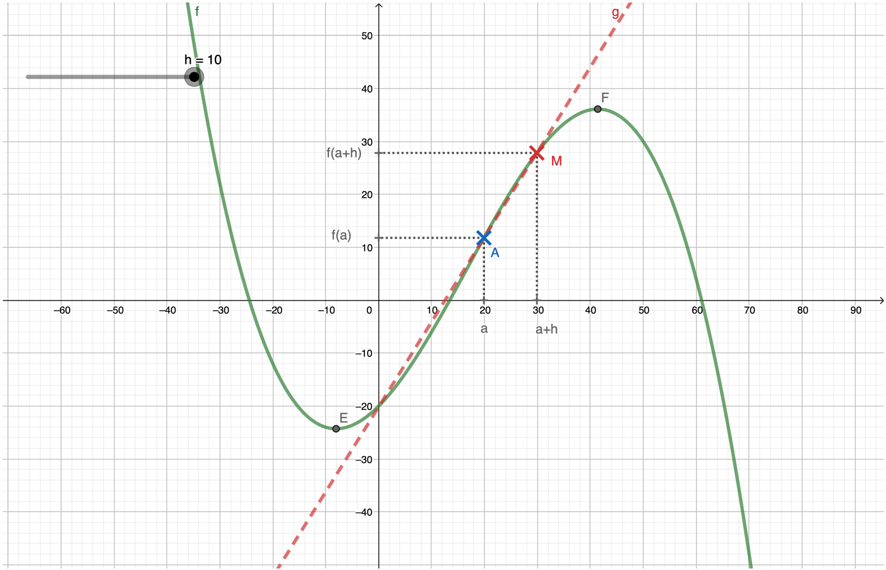
15 avril 2021

Dérivation

Table des matières :

Dérivation

Table des matières :



https://www.geogebra.org/calculator/nquehatk

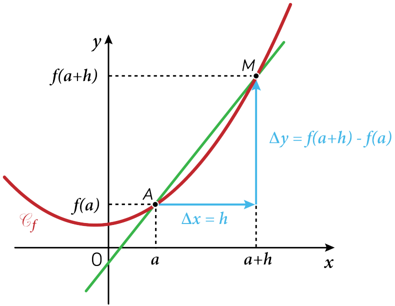
Dérivation

Définition 1 : (taux d'accroissement)

Soit f une fonction, $a \in \mathscr{D}_f$, $h \in \mathbb{R}^*$ et $a + h \in \mathscr{D}_f$.

Le taux d'accroissement de f en a est une fonction τ_a définie par :

$$\boxed{\tau_a(h) = \frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$



Dérivation

Exemple : *Calculez le taux d'accroissement de* $f(x) = x^2$

a. en $x = 0$: $\tau_0(h) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b. en $x = 1$: $\tau_1(h) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c. en $x = a$: $\tau_a(h) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Dérivation

Exemple : *Calculez le taux d'accroissement de* $f(x) = x^2$

a. en $x = 0$: $\tau_0(h) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\tau_0(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 - 0^2}{h} = \frac{h^2}{h} = h$$

b. en $x = 1$: $\tau_1(h) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\tau_1(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1}}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$$

c. en $x = a$: $\tau_a(h) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} = \frac{h^2 + 2ah}{h} = h + 2a$$

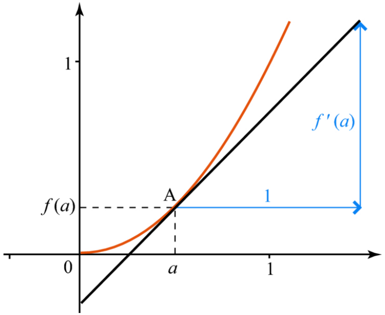
Dérivation

Définition 2 : (dérivabilité / nombre dérivé)

Si le taux d'accroissement de f en a tend vers un nombre réel l lorsque h tend vers 0 alors :

- f est dérivable en a
- le réel l est appelé nombre dérivé de f en a
- ce nombre est noté $f'(a)$:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$



Dérivation

Exemple : *Calculez le nombre dérivé de* $f(x) = x^2$

a. en $x = 0$: $f'(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b. en $x = 1$: $f'(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c. en $x = a$: $f'(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Dérivation

Exemple : *Calculez le nombre dérivé de* $f(x) = x^2$

a. en $x = 0$: $f'(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

b. en $x = 1$: $f'(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2) = 2$$

c. en $x = a$: $f'(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2a) = 2a$$

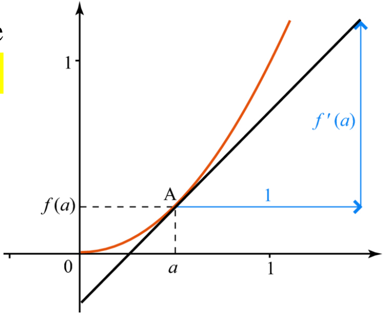
Dérivation

Propriété 1 : (tangente)

Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a :

- de coefficient directeur $f'(a)$
- d'équation réduite :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



Dérivation

Exemple : *Soit $f(x) = x^2$, déterminez l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$:*

a. au point d'abscisse 0 : $y = ...$

b. au point d'abscisse 1 : $y = ...$

c. au point d'abscisse a : $y = ...$

Dérivation

Exemple : *Soit $f(x) = x^2$, déterminez l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$:*

a. au point d'abscisse 0 : $y = \dots\dots\dots\dots$

$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0 \times x + 0 = 0$

b. au point d'abscisse 1 : $y = \dots\dots\dots\dots$

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$

c. au point d'abscisse a : $y = \dots\dots\dots\dots$

$y = f'(a)(x-a) + f(a) = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$

Dérivation

Démonstration :

Soit f une fonction et T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a

Le coefficient directeur de T_a est $f'(a)$ donc :

$$T_a : \quad y = f'(a)\,x + b \qquad (1)$$

Le point $A\,(\,a\,;f(a)\,) \in T_a$ donc :

$$f(a) = f'(a)\,a + b \;\Rightarrow\; b = f(a) - f'(a).a \qquad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \;\Rightarrow\; T_a : \quad \begin{aligned} y &= f'(a)\,x - f'(a).a + f(a) \\ &= f'(a)\,(x-a) + f(a) \end{aligned} \qquad \square$$

Dérivation

Table des matières :

Dérivation

Définition 3 : (dérivabilité sur I / fonction dérivée)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est **dérivable sur I** si f estdérivable $\forall a \in I$

La **dérivée de f** est une fonction notée f' qui à tout réel x de I associe sa dérivée $f'(x)$:

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Dérivation

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$, étudiez la dérivabilité de f :

Dérivation

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$, étudiez la dérivabilité de f :

$\forall a \in \mathbb{R}$:

$\tau_a(h) = 2a \implies \lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h) = 2a \implies f$ est dérivable en a

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Dérivation

Propriété 2 : (dérivée des fonctions usuelles)

Nom	fonction	fonction dérivée	dérivable sur
Constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
Affine	$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
Carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}\ \forall n > 0$ et $\mathbb{R}^*\ \forall n < 0$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
Racine	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$

Dérivation

Exemple :

Calculez la dérivée des fonctions :

a. $f(x) = 3x + 2$

b. $f(x) = x^3$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Dérivation

Exemple : *Calculez la dérivée des fonctions :*

a. $f(x) = 3x + 2$

On applique la dérivée de $ax = b$ avec $a = 3$ et $b = 2$:
f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3$

b. $f(x) = x^3$

On applique la dérivée de x^n avec $n = 3$:
f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

On applique la dérivée de x^n avec $n = -2$:
f définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

Dérivation

Démonstration :

- $f(x) = k$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\implies$ f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$ $\square$

- $f(x) = mx + p$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + p - mx - p}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h \to 0} m = m \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\implies$ f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = m$ $\square$

Dérivation

Démonstration :

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{h\to0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to0} -\frac{h}{hx(x+h)} = \lim_{h\to0} -\frac{1}{x(x+h)}$$
$$= -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$\Longrightarrow$ f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\square$

Dérivation

Démonstration :

- $f(x) = \sqrt{x}$: $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}+$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \quad \text{si } x+h \geq 0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$$

$\implies$ f dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \square$

Dérivation

Propriété 3 : (opérations sur les fonctions dérivées)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I et k une constante $\in \mathbb{R}$

Produit par k	$kf\ :\ x \mapsto kf(x)$	$(kf)' = kf'$
Somme	$f+g\ :\ x \mapsto f(x)+g(x)$	$(f+g)' = f'+g'$
Produit	$fg\ :\ x \mapsto f(x)g(x)$	$(fg)' = f'g+fg'$
Inverse	$\dfrac{1}{g}\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$	$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$
Quotient	$\dfrac{f}{g}\ :\ x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

Dérivation

Exemple :

Calculez la dérivée des fonctions :

a. $f(x) = ax^2 + bx + c$

b. $f(x) = x\sqrt{x}$

Dérivation

Exemple : *Calculez la dérivée des fonctions :*

a. $f(x) = ax^2 + bx + c$

f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2ax + b$

b. $f(x) = x\sqrt{x}$

f définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}+*$

Soit $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Dérivation

Démonstration :

- Soit $h(x) = f(x) + g(x)$ avec f et g dérivable sur I

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x) \quad \forall x \in I \qquad \square$$

- Soit $h(x) = f(x)\,g(x)$ avec f et g dérivable sur I

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \left(f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \right) = f'g + fg' \quad \forall x \in I \qquad \square$$

Dérivation

Propriété 4 : (composition de fonctions)

Soit h une fonction dérivables sur I et J l'image de I par h
Soit g une fonction dérivable sur J
Soit f la fonction composée : $f(x) = g\Big(h(x)\Big)$

$$f\ :\ x \mapsto h(x) \mapsto g(h(x))$$

Si $h(x) = ax + b$, alors $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{f'(x) = a \times g'(ax + b)}$$

NB : Dans le cas général, $f(x) = g\Big(h(x)\Big)$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{f'(x) = g'(x) \times g'\Big(h(x)\Big)}$$

Dérivation

Exemple :

Calculez la dérivée des fonctions :

a. $f(x) = (2x+3)^{10}$

b. $f(x) = \sqrt{2x+6}$

Dérivation

Exemple :

Calculez la dérivée des fonctions :

a. $f(x) = (2x+3)^{10}$

$h(x) = 2x+3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $h'(x) = 2$
$g(x) = x^{10}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $g'(x) = 10\,x^9$

$\Rightarrow$ f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2 \times 10 \times (2x+3)^9 = 20\,(2x+3)^9$

b. $f(x) = \sqrt{2x+6}$

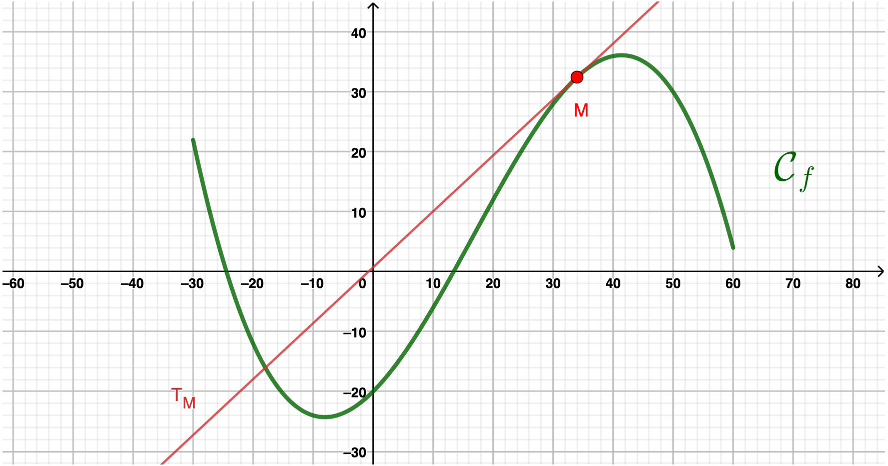
$h(x) = 2x+6$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $h'(x) = 2$
$g(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$: $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow$ f définie sur $[-3\,;+\infty\,[$ et dérivable sur $]-3\,;+\infty\,[$ et :

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$$

Dérivation

Table des matières :



https://www.geogebra.org/graphing/csgue7cb

Dérivation

Propriété 5 : (dérivée et variations d'une fonction)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ est constante sur } I \tag{1}$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ est strictement croissante sur } I \tag{2}$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \iff f \text{ est strictement décroissante sur } I \tag{3}$$

NB :

$\cdots \geq 0$ ... ... ~~strictement~~ croissante ...

Dérivation

Exemple : *Etudiez la variation des fonctions :*

a. $f(x) = k \quad avec\ k \in \mathbb{R}$

b. $f(x) = mx + p$

c. $f(x) = x^2$

Dérivation

Exemple : *Etudiez la variation des fonctions :*

a. $f(x) = k \quad avec\ k \in \mathbb{R}$

f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0 \implies f$ est constante sur $\mathbb{R}$

b. $f(x) = mx + p$

f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = m$

∘ si $m = 0$: f est constante sur $\mathbb{R}$

∘ si $m > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

∘ si $m < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

c. $f(x) = x^2$

f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$

∘ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\,0\,;\,+\infty\,[\implies f$ croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$

∘ $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]-\infty\,;\,0\,] \implies f$ décroissante sur $]-\infty\,;\,0\,]$

Dérivation

Exemple : *Etudiez la variation des fonctions :*

d. $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad avec\ a \neq 0$

Dérivation

Exemple : *Etudiez la variation des fonctions :*

d. $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad avec\ a \neq 0$

f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \iff x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$

- <u>*si* $a > 0$:</u>

  $f'(x) \geq 0 \iff x \geq \alpha$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

- <u>*si* $a < 0$:</u>

  $f'(x) \geq 0 \iff x \leq \alpha$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Dérivation

Définition 4 : (extremum global et local)

Soit f définie sur un intervalle I et des réels m, M et $\alpha \in I$

m est un **minimum** de f sur I $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, \quad f(x) \geq m$

M est un **maximum** de f sur I $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in I, \ f(x) \leq M$

α est un **extremum** de f sur I $\Longleftrightarrow$ α est un minimum **ou** un maximum de f sur I

α est un extremum **local** de f sur I $\Longleftrightarrow$ $\exists$ un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que α est un extremum de f sur J

Dérivation

Exemple :

Dérivation

Propriété 6 : (dérivée et extremum)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Soit $a \in I$

f admet un extremum local en a $\Longrightarrow$ $\boxed{f'(a) = 0}$

f admet un extremum local en a $\Longleftrightarrow$ $\boxed{f'(a) = 0}$ et f' change de signe de part et d'autre de a

Dérivation

Exemple :

Dérivation

Méthode 1 : (étude de variation d'une fonction)

Pour étudiez la variation d'une fonction f, ainsi que ses extremum, procédez comme suit :

1. Déterminez l'ensemble de définition et de dérivabilité de f
2. Calculez sa dérivée et dressez le tableau de signe de f'
3. Dressez le tableau de variation de f qui en découle
4. En déduire éventuellement les extremum de f

Dérivation

Exemple :